n.V.

OS81 n.v.

Zur
k. Landwirthschafts u. Gewerbs-
schule Straubing

18 43/44

A 264

6X

Kurze jedoch hinreichende

Theorie

der

Geometrie und Trigonometrie

samt

dem Wesentlichen der Praxis

für

Förster, Jäger und andere Feldmesser

dieser Art,

geschrieben von Joseph Schäblen,

öffentlichen ordentl. Lehrer der Mathematik auf der Hochfürstlich-bischöflichen Universität zu Dilingen.

Landshut,

im Verlage bey Anton Weber. 1796.

131546589

Staatl. Bibliothek Passau

Vorrede.

Daß die praktische Geometrie eine dem Staate höchst nützliche und fast unentbehrliche Sache sey, bezweifelt nun niemand mehr. Daß man derselben Werth immer thätiger zu schätzen wisse, beweisen die vielen landesherrlichen Verordnungen, die vielfältig erschienen, und dahin abzwecken, daß man nach und nach von der Erdoberfläche bis auf die kleinsten Theile genaue, sichere, anwendbare Entwürfe erhalten möchte. An Aufmunterung der jungen Leute fehlt es auch nicht; man unterstützt sie vielfältig, man läßt sie Feldmesserey oft mit nicht geringen Kosten erlernen. Wie aber die Lehrmeister sind, werden ihre Zöglinge ausfallen; meistentheils haben wir noch bloß prakti-

sche Feldmesser; ein Umstand, der der Vollkommenheit der Feldmesserey sehr im Wege steht. Ein Feldmesser, dessen ganze Kunst sich nur auf eine Art zu messen einschränkt; der nur maschinenmäßig fortarbeitet; der sich über seine Grenzen nicht hinauswagt; der sich nicht hinauswagen darf, ohne den gröbsten Fehlern sich auszusetzen, ist ein elendes Ding, so etwas, wie der gemeinste Handwerker, der ja keinen andern Schritt macht, als den er in seiner Lehrezeit gesehen. Es scheint nun wahres Bedürfniß zu seyn, daß man dem Anfänger in der Feldmesserey einige Bogen in die Hand gebe, in welchen eine kurze, für ihn passende und hinlängliche Theorie enthalten wäre, wodurch er in Stand gesetzt würde, mit Wissenschaft in die Sache zu gehen, und daß künftighin nicht die Arbeit über ihn, sondern er über die Arbeit Herr wäre. Diese Aufgabe eine für den Feldmesser kurze, pas-

sende

sende hinlängliche Theorie der Geometrie zu schreiben, hat vielleicht mehrere Schwierigkeiten, als man sich beym ersten Anblicke vorstellt, so wohl in Rücksicht des Objekts als des Subjekts. Die Bücher, die in Menge schon geschrieben worden, die gewiß ihren unstrittigen Werth haben, enthalten bald zu viel, bald zu wenig von dem Wissenschaftlichen. Das zu viel verursacht, daß man die Theorie als etwas unnützes auf die Seite legt, das zu wenig macht, daß der Lehrnende niemal jene Einsicht bekommt, die ihn seiner mächtig macht.

Ich habe in gegenwärtigen Blättern einen Versuch gemacht eine Theorie der Geometrie für den großen Haufen der Feldmesser zu schreiben, wo ich zugleich das Wesentliche der Ausübung eingemischt habe, so daß ich glaube, jener, der sich diese Theorie ganz eigen macht, werde sich allezeit selbst helfen können, und im

Stande

Stande seyn, auch andere praktische Bücher mit mehrerer Fertigkeit zu lesen, und mit größerem Nutzen gebrauchen zu können.

Die Beweise habe ich so eingerichtet, daß ich glaubte, sie sey der Fähigkeit derjenigen, für die ich geschrieben, anpassend. Ich hätte zwar noch manches weglassen, und diese Theorie in noch engere Grenzen bringen können; ich dachte aber, ein junger Mensch, der sich die Theorie will eigen machen, muß sich bewerben eine Fertigkeit zu erhalten in leichter Einsehung der Beweise, und dürfe also nicht gar zu kurz seyn; wobey ich aber die Sorgfalt gehabt, jenes zu wählen, was unmittelbar auf die Ausübung abzielt. Hätte ich aber vieles an sich entbehrliches eingeschaltet, so würde ich meinen Zweck verfehlt haben. Den mittleren Weg zu nehmen war meine Absicht.

Ich bin der Meinung in Zeit von einem halben Jahre, könne jeder mittel-

mäßig fähiger Kopf gegenwärtige Theorie studiren; wenn er auch ein halbes Jahr auf Arithmetik, und auf etwas Algebra verwendet, so haben wir ein Subjekt, welches in der Praxis sich in nichts zu fürchten hat, und darinne stark werden kann. Ich bin durch die Erfahrung versichert, daß der jenige, der nur allein das praktische erlernet, um etwas namhaftes zu kennen, weit mehrere Zeit anwenden müsse, und in der That doch weniger erlernet, als einer, der seinen Praxis auf Theorie bauet.

Ich wünschte auch, daß Anfänger einen ähnlichen theoretischen Unterricht aus Arithmetik und Algebra in Händen hätten. Diesem wäre schon zum grossen Theil abgeholfen, wenn man sich meiner Arithmetik und Algebra, die in Dilingen herausgekommen, bedienen wollte, und davon nur das einem Feldmesser nothwendige herausnähme. Zu diesem Ende

will

will ich jenes wenige anzeigen, was vonnöthen ist. Arithmetik muß ganz genommen werden. In den Brüchen könnte man allenfalls die Beweise weglassen. In der Algebra nimmt man das erste Hauptstück ganz, die härtern Beyspiele werden ausgelassen. Im zweyten Hauptstücke nimmt man 135. 136. 144 in diesem letzten fängt man bey der Formul $x^2 + 2ax + a^2 +^2$ an. §. VII. ganz. Im dritten Hauptstücke von 175 bis 183. Im vierten Hauptstücke von 228 bis 239. von 249 bis 258. alsdann 261. 263. 265. 266. 268. 269. ohne Anmerkung. 271. 274. 275. 276. 277. 279. §. V. §. VIII. §. IX. ganz. Wenn man das angezeigte studirt, so hat man ein ähnliches Kompendium inne von Arithmetik und Algebra, als ich gegenwärtig von Geometrie dem Anfänger vorlege.

Geome=

Geometrie.

I.

Der Gegenstand der Geometrie ist Grösse. Eine Linie ist eine Grösse, die eine Länge, keine Breite hat. Weil ein Punkt nur Anfang der Linie ist, so hat er keine Grösse, denn eine solche Grösse müßte ja wiederum einen Anfang haben; also muß der Punkt ohne alle Grösse gedacht werden, und ist folglich kein Gegenstand der Mathematik. Eine Fläche ist eine Grösse, die Länge, und Breite hat. Ein Körper ist eine Grösse, die Länge, Breite, Tiefe hat. Eine gerade Linie ist jene, die von einem Punkte zu einem anderen also hinlauft, daß sie auf keine Seite abweicht, weicht sie ab, so ist sie eine **krumme Linie**; und wenn eine gerade Linie auf einer Fläche, wie man sie immer hinlegt, ganz aufliegt, ist die Fläche **eben**, sonst **uneben**.

2. Wenn zwey Linien einander schneiden, geschieht es nur in einem Punkte, denn die Linien haben keine Breite. Die **Neigung zweyer Linien** die einander schneiden, ist ein **Winkel**. Sind die Linien **gerade**, so ist es ein **geradlinichter**, sind sie **krumme**, ein **krummlinichter**, ist die eine gerad, die andere **krumm**, ein **vermischtlinichter** Winkel.

3. Die Entstehungsart der geometrischen Größen ist folgende: **Linie** entsteht durch Bewegung des **Punkts**. **Fläche** durch Bewegung der Linie, doch nach einer anderen Richtung, als jener der Linie selbst. **Körper** durch Bewegung der Fläche, nach einer anderen Richtung, als jener der Fläche.

4. Ein Zirkel ist eine ebene Fläche, die von einer krummen Linie so begrenzt ist, daß alle Punkte dieser Linie gleichweit entfernt sind von einem inner derselben liegenden Punkte. Fig. 1. sey ein **Zirkel**, die krumme Linie EBHM ist der **Umkreis, Peripherie, Zirkumferenz**. Der Punkt A, der von allen Punkten der krummen Linie gleiche Abstände hat, ist der **Mittelpunkt**, das **Zentrum**. Die Linie die vom Zentrum zur Peri-

pherie

pherie gerad gezogen wird, ist der **Radius**; demnach sind alle Radius AB, AC, AD einander gleich. Wenn ein Radius AB verlängert der Peripherie in F begegnet, so ist BF **Diameter, Durchmesser.** Daher ist der **Radius** der halbe **Durchmesser.** Ein Theil der Peripherie als BC, BD, CD ist ein Zirkelbogen; nun ist offenbar, daß je grösser ein Bogen ist, der zwischen den Linien oder Schenkeln eines Winkels liegt, desto grösser auch der Winkel sey, also ist DAB grösser als CAB; diese Bögen sind das bequemste Maaß der Winkel. Man theilt daher die Peripherie in eine beliebige Anzahl Theile, die man **Grade** nennt, aus deren Menge man den Begriff von der bestimmten Grösse eines Winkels erhält. Man theilt jetzt die Peripherie in 360 Grade, jeden Grad in 60 Theile, die man **Minuten**, jede Minute in 60 Theile, die man **Sekunden** nennt, u. s. w. Es ist gleichviel, ob man einen Winkel mit einem Bogen eines Zirkels von einem grossen, oder kleinen Radius messe, man bekommt allzeit gleichviel Grade, der Unterschied ist nur in der Grösse der Grade.

5. Man bilde sich ein, auf FB liege eine Linie beweglich um das Zentrum; sie bewege sich um A, und nehme die Richtung CG an, so wird sich

die Linie AC mehr gegen AB, als gegen AF neigen. Der Punkt C wird durch Aufsteigen in eine solche Lage kommen, daß sich AC weder mehr zu B noch mehr zu F neige, dieß sey in der Lage AE; wenn die Linie in ihrer Bewegung fortfährt, so wird sie sich mehr gegen F als gegen B neigen, dieß sey in der Lage AM. Im ersten Falle ist CAB ein **spitziger**, im zweyten ist EAB oder EAF ein **rechter**, im dritten Falle ist MAB ein **stumpfer** Winkel. Ein spitziger Winkel ist demnach **kleiner**, ein stumpfer **grösser** als ein rechter. Was oben mit AC vorgeht, geht unten mit AG der Verlängerung vor; alle Winkel die im ganzen Zirkel um A liegen haben 360°; (eine oben angebrachte o heißt Grade, **ein** Strich, Minuten, **zwey** Striche heißen Sekunden) alle Winkel die ober, oder unter FB liegen haben 180°, **der rechte Winkel** 90°. Die zwey Winkel CAB, CAF zusammen haben also 180°, wenn man einen weiß, so weiß man auch den anderen. Und man sagt einer ist des anderen **Ergänzungswinkel** zu 180°.

Der Winkel CAB Fig. 2. hat unten einen entgegengesetzten FAG, der Winkel CAF hat auch einen entgegengesetzten GAB. Zwey auf diese Art entgegengesetzte Winkel nennt man **Vertikalwinkel;**

kel; sie sind allzeit einander gleich, denn AC kann nicht steigen, ohne daß AG eben so viel falle, der Bogen CB ist also gleich GF, dieß gilt auch von den stumpfen Vertikalwinkeln.

6. Eine Linie, die eine andere also schneidet, daß sie sich auf keine Seite mehr neiget, ist eine **Perpendikularlinie, senkrechte** Linie; so ist Fig. 3. CD auf AB **senkrecht**, und macht bey E vier rechte Winkel; es ist auch gegenseitig AB auf CD senkrecht.

7. Wenn CD auf AB senkrecht, und E gleichweit von F und G entfernt ist, so ist jeder Punkt im Perpendikel gleichweit entfernt von F und G, als C oder H, denn die senkrechte Linie neigt sich auf keine Seite mehr, also muß CF = CG seyn; man kann auch sagen: der Perpendikel geht durch alle Punkte die gleichweit entfernt sind von F und G. Wenn E außer AB wäre wie H, so hat die nämliche Eigenschaft Platz. Wenn man umgekehrt weiß, daß zwey Punkte, als C und H, gleichweit entfernt sind von F und G, und wenn man durch C und H eine Linie zieht, so ist sie auf AB senkrecht, denn zwey Punkte bestimmen die Lage einer Linie, sie geht hiemit durch alle Punkte die gleichweit von

F

F und G entfernt sind, d. i. sie ist auf AB senkrecht.

8. Aus einem Punkte E kann man **nur eine** senkrechte Linie errichten, und aus einem Punkte C **nur eine** senkrechte fallen lassen; ist ohne Beweis klar.

9. Die Perpendikularlinie ist aus allen die man aus einem Punkte auf eine Linie hinziehen kann, die kürzeste; man kann also mit dieser am bequemsten den Abstand eines Punkts von einer Linie messen.

10. **Aufgabe.** Man giebt einen Winkel BAC Fig. 4, man soll untersuchen wie viel er Grade habe. Man nehme einen in Grade eingetheilten Halbzirkel, und lege sein Zentrum an die Spitze an, und seinen Radius scharf an AC, alsdann zählt man an seiner Peripherie von D bis E die Grade. Einen in Grade eingetheilten Halbzirkel nennt man transporteur.

11. **Aufgabe.** Man soll bey A einen Winkel von einer gegebenen Anzahl Grade aufzeichnen. Man legt das Zentrum des Halbzirkels bey A an,

den

den Radius scharf an AC, und zählt in der Peripherie die verlangte Grade, man macht da ein Zeichen; durch A und dieses Zeichen zieht man eine Linie, so ist der verlangte Winkel verfertiget.

12. **Aufgabe.** Man giebt den Winkel BAC, man soll einen ihm gleichen oder noch so grossen, oder noch so kleinen machen. Man zieht eine Linie a c, und untersucht (10) wie viel Grade BAC habe; alsdann macht man an die Spitze a einen eben so grossen e a c; für einen doppelt so grossen multiplicirt, für einen noch so kleinen dividirt man den gegebenen Winkel mit 2, und macht g a c noch so groß, f a c noch so klein.

Mit dem Zirkelinstrumente, oder mit dem Zirkel. Man öffne den Zirkel nach Belieben, setze den einen Fuß in A, und beschreibe mit dem anderen den Bogen DE, mit der nämlichen Oeffnung beschreibe man, da man den einen Fuß in a setzt, mit dem andern den Bogen d g; alsdann fasse man mit den Zirkelspitzen den Bogen DE, übertrage ihn aus d in e einmal, für einen noch so grossen Winkel zweymal bis in g; für einen noch so kleinen halbirt man d e in f, man zieht die Linien a e, a g, a f, so hat man das Verlangte.

13. Aufgabe. Man soll aus A Fig. 5. auf BC einen Perpendikel errichten. Man setzt einen Zirkelfuß in A, macht mit dem andern mit beliebiger doch gleicher Oeffnung in D und E Durchschnitte. A ist also gleichweit entfernt von F und E, man sucht noch einen Punkt der gleichweit von F und E entfernt ist, indem man den Zirkel etwas mehr öffnet, den einen Fuß in E einsetzt, mit dem anderen den Bogen m n beschreibt; mit der nämlichen Oeffnung beschreibt man aus F den Bogen p q der m n in D schneidet. Durch D und A ziehet man eine Linie, sie ist senkrecht auf BC.

14. Aufgabe. Aus einem Punkte A Fig. 6. soll man auf BC einen Perpendikel fallen lassen. Man suche zwey Punkte in BC von welchen A gleichweit entfernt ist, indem man aus A mit einer beliebigen aber unveränderter Zirkelöffnung in d und e Einschnitte macht, alsdann macht man aus d und e mit der nämlichen oder einer anderen Oeffnung zwey in D sich schneidende Bögen p q und m n. D ist hiemit auch gleich entfernt von d und e; die Linie also, die man durch A und D zieht, ist auf BC senkrecht.

15. Aufgabe. Man soll AB Fig. 7. in zwey gleiche Theile schneiden. Den einen Fuß des Zirkels setze man in A, beschreibe mit einer Oeffnung die grösser als halb AB bey C und D zwey Bögen, mit der nämlichen Oeffnung beschreibe man aus B zwey Bögen, welche die vorigen in C und D schneiden, durch C und D zieht man CD, sie halbirt AB in F. Denn wenn zwey Punkte einer Linie als C und D von zweyen andern als A und B gleichweit entfernt sind, so sind alle Punkte eben dieser Linie von A und B gleichweit entfernt, also auch F, es ist AF = FB, oder AB ist halbirt. Man könnte die Durchschnitte auch bey C und E oder bey D und E nehmen. Wenn AB in vier Theile soll geschnitten werden, so wird noch AF und FB eben so halbirt. Oft werden Linien mit blossem Probieren getheilt, sonderbar wenn die Zahl der Theile ungerad ist. Wie man mit dem Winkelmaaße oder Transportör Perpendikel mache, wird leichter mit den Instrumenten gezeigt.

16. Zwey gerade Linien können niemal auf allen Seiten eine Fläche einschliessen wenn sie sich schon schneiden: es muß also eine dritte dazu kommen, welche die zwey jedoch nicht in ihrem Durchschnittspunkte schneidet. Fig. 8. werden BC und CD

von

von AE außer dem Punkte C in B und D geschnitten; die also eingeschloßne Fläche wird ein Dreyeck genennt. **Ein Dreyeck ist eine von dreyen Linien eingeschlossene Fläche.** Das Dreyeck hat drey Linien, und drey Winkel, von welchen es verschiedene Benennungen erhält.

17. Wenn in einem Dreyecke alle Seiten gleich sind, so nennt man es **gleichseitig**, wie Fig. 9. Wenn **nur zwey** Seiten gleich sind, nennt man es **gleichschenklicht**, wie Fig. 10. wo BC = CD. Wenn **keine** Seite einer anderen gleich ist, nennt man es **ungleichseitig** wie Fig. 11.

Wenn in einem Dreyecke eine Linie mit einer andern einen **rechten** Winkel macht, ist es **rechtwinklicht** wie Fig. 12. Wenn eine Linie mit der andern einen **stumpfen** Winkel macht, ist es **stumpfwinklicht**, wie Fig. 11. Wenn alle Winkel spitzige sind ist es **spitzwinklicht** wie Fig. 9. und 10.

18. Drey Punkte, die nicht in einer geraden Linie liegen, bestimmen das ganze Dreyeck. Wenn drey Punkte eines Dreyecks so liegen, wie drey andere eines anderen Dreyecks, so bestimmen diese

glei-

gleiche Lagen gleiche Dreyecke. Wenn man zeigen kann, daß die Eckpunkte eines Dreyecks auf die Eckpunkte eines anderen fallen, wenn man die Dreyecke aufeinander legt, so sind sie in allem d. i. in Linien und Winkeln ganz gleich.

19. Es giebt drey Fälle für welche man beweißt, daß die Endpunkte eines Dreyecks, auf die Endpunkte eines anderen fallen. I. Fall. Wenn man von zweyen Dreyecken weiß, daß zwey Seiten des einen gleich sind zweyen Seiten des anderen, und daß auch die zwischen diesen Seiten liegende Winkel einander gleich sind, so kann man die Dreyecke so aufeinander legen, daß sie einander vollkommen decken.

Fig. 13. sey AB = ab, BC = bc, der Winkel B = b. Das AC = ac, A = a, C = c ist unbekannt, muß also bewiesen werden. Weil BC = bc, kann man BC auf bc also legen, daß sie sich vollkommen decken, also fallen schon zwey Eckpunkte B und C, auf zwey Eckpunkte b und c, also ist nur noch zu zeigen, daß auch der dritte A auf den dritten a fallen müsse. Weil B = b, so muß die Linie BA auf ba fallen, und weil BA = ba, so reicht BA eben so weit als ba, d. i. A fällt auf a.

Al-

Also fallen die drey Punkte B. C. A auf b. c. a, die Dreyecke decken einander vollkommen, also ist auch AC = ac, A = a, C = c. So oft man demnach in zweyen vorliegenden Dreyecken sieht, daß zwey Seiten des einten gleich sind zweyen Seiten des anderen, und die zwischen diesen Seiten liegende Winkel, so schließt man allzeit, daß die Dreyecke auch in den übrigen Stücken vollkommen gleich sind.

20. **Aufgabe.** Man giebt zwey linien, und die Grösse des zwischen denselben liegenden Winkels, man soll daraus ein Dreyeck machen, z. B. man gebe BC und AB, der Winkel B soll werden 41°. Man nimmt BC mit dem Zirkel, überträgt es auf bc, man macht b = 41°, und ba = BA, zieht von a zu c eine Linie, so hat man das verlangte Dreyeck.

21. II. **Fall.** Wenn in zweyen Dreyecken eine Linie des einten gleich ist einer Linie des anderen, und die neben diesen gleichen Linien liegende Winkel des einten gleich sind den Winkeln des anderen, so werden die Dreyecke einander vollkommen decken, und in allem übrigen gleich seyn. Fig. 14. sey BC = bc, B = b, C = c. Weil

BC = bc, so kann man BC auf bc also legen, daß B auf b, C auf c fällt, es ist also nur noch zu zeigen, daß auch bey unseren Voraussetzungen A auf a falle. Weil B = b, so fallt BA auf ba, aber dadurch ist noch nicht bestimmt, daß A auf a falle, denn A kann unter a in D, auf a, oder ober a in d fallen. Kurz die Gleichheit der Winkel B und b bestimmt nichts anderes als daß A irgendwo in der Linie ba zu liegen komme. Ferner ist C = c, demnach fällt CA auf ca; aber aus diesem allein weiß man nicht ob A auf a fallen müsse; nur allein kann man sagen, daß A irgendwo in ca seyn müsse; nehme man aber beydes zusammen, so erhellet, daß A auf a falle, den gemäß B = b fällt A in ba, gemäß C = c fällt A in ca, d. i. A fällt in zwey Linien zugleich, also dorthin, wo ba und ca sich schneiden, d. i. auf a, also fallen A. B. C auf a. b. c. Die Dreyecke decken einander, und sind in allem vollkommen gleich: es ist also AB = ab, AC = ac, A = a, welches alles zuvor unbekannt war. Wenn also künftig der Fall ist, daß man sieht in zweyen Dreyecken sey eine Linie des einen gleich einer Linie des anderen, und zwey Winkel des einen gleich zweyen Winkeln des andern, so schließt man unfehlbar auf die Gleichheit der Dreyecke.

22. Aufgabe. Man giebt die Länge einer Linie, und zwey Winkel, man soll daraus ein Dreyeck verfertigen: oder man soll ein Dreyeck zeichnen, in welchem nur eine Linie und zwey Winkel bekannt sind. Man giebt BC, und B = 53°, C = 64°. Man zieht bc, und macht sie BC gleich. b macht man 53°, und zieht ba unbestimmt aus, c macht man gleich 64° und zieht ca bis sie ba in a schneidt, so ist abc das verlangte Dreyeck.

23. III. Fall. Wenn man von zweyen Dreyecken weiß, daß drey Seiten des einen gleich sind dreyen Seiten des andern, ohne einen Winkel zu wissen, so sind die Dreyecke einander gleich. Fig. 15. sey DE = LG, EF = GH, DF = LH. Man lege EF auf GH, daß E auf G, F auf H falle, welches möglich, weil EF = GH: es muß also noch gezeigt werden, daß auch D auf L fallen müsse, so wird DEF das Dreyeck LGH decken. Man nehme ED als den Radius eines Zirkels an, mit dem man aus G einen Bogen mn beschreibt, weil ED = LG, so reicht sowohl ED = GL in diesen Bogen; ob aber D auf L falle ist durch dieses allein noch nicht bestimmt, weil man von den Winkeln nichts weiß. Man nehme FD als Radius eines Zirkels an, und beschreibe aus H als Zentrum

trum den Bogen pq. Ob nun D auf L falle ist durch dieses allein nicht bestimmt, weil man nicht weiß ob F = H. Nimmt man aber beyde Bögen zugleich, so erhellet, daß D sowohl in mn als pq falle, also dorthin, wo sich die Bögen schneiden, d. i. auf L. Die Dreyecke decken demnach einander, und haben auch die Winkel gleich, d. i. E = G, F = H, D = L. So oft also in zweyen Dreyecken der Fall von der Gleichheit aller Linien vorkommt, schließt man unfehlbar auf die Gleichheit der Dreyecke.

24. **Aufgabe.** Man giebt drey Linien, man soll daraus ein Dreyeck machen, oder man giebt ein Dreyeck, man soll ein anders ihm gleiches verfertigen. Die Linien seyen EF, FD, DE, oder man giebt das Dreyeck EFD. Man ziehe GH, mache sie gleich EF, mit ED als Radius beschreibe man aus G als Zentrum den Bogen mn, mit FD aus H den Bogen pq, der mn in L schneidet, von G und H zieht man zu L Linien, so ist GHL das verlangte Dreyeck.

Anmerkung. Wenn man in den drey letzten Aufgaben Bedingnissen setzt, welche die Auflösung unmöglich machen, so zeigt sich diese Unmög-

lich-

lichkeit alsogleich. Z. B. wenn man aus dreyen Linien sollte ein Dreyeck machen, von welchen zwey zusammen genommen kleiner sind als die dritte, so ist das Dreyeck unmöglich.

25. In jedem gleichschenklichten Dreyecke sind die den gleichen Seiten entgegengesetzte Winkel einander gleich. Fig. 16 sey AB = AC, so ist B = C. Aus A falle ein Perpendikel auf BC, durch diesen wird das Dreyeck in zwey andere ABD, ADC getheilt. Wenn man nun beweißt daß diese neue Dreyecke einander gleich sind, so folgt unmittelbar, das B = C. Wenn man diese Dreyecke betrachtet, so bemerkt man, daß einer von den dreyen Fällen 19. 21. 23. unter welchen zwey Dreyecke einander gleich sind, eintrete, und zwar der erste, nämlich: Wenn zwey Seiten eines Dreyecks gleich sind zweyen Seiten eines andern, und die zwischen den gleichen Seiten liegende Winkel, so sind die Dreyecke gleich; dieser Fall ist hier. Denn AD ist gleich AD, oder ist eine Linie sowohl von ABD, als ACD, BD ist gleich CD, dieß fließt aus der Eigenschaft des Perpendikels (7). Wenn ein Punkt gleichweit absteht von zweyen Punkten B und C einer anderen Linie (hier tritt die vorausgesetzte Bedingniß ein, daß ABC gleichschenklicht, oder

AB

AB = AC) und man aus diesem Punkte einen Perpendikel fallen läßt, so sind alle Punkte der Linie AD gleichweit entfernt von BC, also auch D, d. i. BD = CD. Auch die zwischenliegenden Winkel sind gleich; denn ADB ist ein rechter wie ADC, wegen dem Perpendikel AD, also ist das Dreyeck ADB gleich ADC, also B = C. Um es noch besser einzusehen, setze man das Dreyeck ADB wie adb, daß db = DB, ad = AD, bey d sey ein rechter Winkel, so ist offenbar das Dreyeck adb = ADC, und b = C also auch c = B.

In einem gleichseitigen Dreyecke sind alle drey Winkel unter einander gleich; denn es ist über allen Seiten gleichschenklicht, wie Fig. 9 zeigt.

26. **Umgekehrt.** Wenn man weiß, daß in einem Dreyecke zwey Winkel einander gleich, so sind auch die die diesen Winkeln entgegengesetzten Seiten gleich, d. i.: das Dreyeck ist gleichschenklicht. In Fig. 17. sey der Winkel ADB = ABD, so ist auch AD = AB. Wäre DAB nicht gleichschenklicht, so könnte man A so lange auf oder ab schieben etwa in E oder F, bis ein gleichschenklichtes Dreyeck entstünde; nehme man an, dieses geschehe bey F, d. i. FBD sey gleichschenklicht, so muß man diesem Dreyecke die einem gleichschenklichten Dreyecke zukommende

B Eigen-

Eigenschaft, (25) daß m = n sey, einräumen; weil aber unsere Voraussetzung bleibt, daß nämlich der Winkel ADB oder p + m auch dem n gleich sey, so wäre nothwendig m allein = m + p zusammen; denn wenn zwey Sachen einer nämlichen dritten gleich sind, sind sie unter einander gleich, aber m kann unmöglich m + p als ein Theil seinem Ganzen gleichen, also ist unmöglich, daß FDB gleichschenklicht. Da dieser Beweis bey jedem Punkte der ganzen Linie BE angeht, nur allein bey A nicht, wo p oder q verschwindet, so kann kein anderes Dreyeck gleichschenklicht seyn als ADB, in welchem man den Winkel ADB = n setzt. So oft man also weiß, daß in einem Dreyecke zwey Winkel gleich sind, so schließt man unfehlbar auf die Gleichheit der diesen Winkeln entgegengesetzten Seiten.

27. Wenn eine gerade Linie von einer anderen geschnitten wird, entstehen allzeit vier Winkel, derer Maaß 360° ist, oder die Peripherie des Zirkels. Fig. 18 werde AB von CD in E geschnitten, so entstehen um E vier Winkel: a, b, c, d; und da man um jeden Punkt E einen Zirkel beschreiben kann, so ist dessen Peripherie das Maaß aller vier Winkel; und weil von der Peripherie so viel ober AB als unter AB ist, so haben a + b 180°. So

oft

ist also eine gerade Linie einer anderen begegnet, so haben die zwey Winkel 180° zum Maaße. Diese 180° bleiben, wie viel man immer Linien zum nämlichen Durchschnittspunkte zieht; denn die Linie hat keine Breite, kann also von der Anzahl der Grade nichts wegnehmen. Man sehe Fig. 19.

28. **Umgekehrt.** Wenn man setzt, zwey Linien, Fig. 18, AE, BE begegnen einer dritten CE in E also, daß die Winkel $a + b = 180°$, so ist AEB nur eine gerade Linie; denn 180° sind die halbe Peripherie, also AB der Durchmesser, oder eine gerade Linie.

29. Wenn zwey oder mehrere Linien also gezogen sind, daß sie sich niemals begegnen, oder schneiden, so sind sie **Parallellinien.** Fig. 20 seyen MN und PQ zwey Parallelen zugleich durchschnitten von FG; wir haben also den Fall der 18. Fig. doppelt. Bey jedem Durchschnitte entstehen vier Winkel; MN giebt a, b, c, d; PQ giebt e, f, g, h. Diesen Winkeln giebt man in Anbetracht ihrer Lage verschiedene Namen. d, e sind **innere Wechselwinkel**, weil sie inner den Parallelen, und in Rücksicht der schneidenden Linie auf **verschiedenen** Seiten liegen. c und f sind also auch **innere**

Wechselwinkel. a, h, auch b, g sind äußere Wechselwinkel. a, e sind ein äußerer und innerer entgegengesetzter auf der nämlichen Seite der schneidenden Linie FG, einer bey der oberen, einer bey der unteren Parallellinie.

30. Wenn Parallellinien von einer dritten geschnitten werden, so sind die inneren Wechselwinkel einander gleich. Fig. 21 schneide EF die Parallelen MN, PQ. Innere Wechselwinkel sind m, n. Um zu beweisen, daß sie gleich sind, läßt man von A auf PQ den Perpendikel AB, und aus C auf MN den Perpendikel CD fallen; diese Perpendikel sind gleichgroß; denn jeder mißt den Abstand zweyer Parallelen (9), die ihrer Wesenheit nach überall gleichweit entfernt sind (29). Aber nicht nur ist AB = CD, sondern AB ist auch parallel mit CD; denn wiewohl AB nur auf PQ senkrecht gemacht worden, so ist sie dennoch auch auf MN senkrecht, weil MN und PQ in Rücksicht auf eine jede dritte Linie die nämliche Richtung haben; weil nun auch CD auf MN senkrecht, so sind BA, und CD auf die nämliche dritte MN, senkrecht, also unter einander auch parallel. Hiemit sind auch AD und BC nicht nur parallel, sondern auch Perpendikel zwischen Parallelen BA, CD, also

AD = BC.

AD = BC. Bey B und D sind rechte Winkel, also sind in den zweyen Dreyecken ABC, ADC zwey Linien des einten gleich zweyen Linien des anderen; auch sind die zwischen diesen Linien liegenden Winkel einander gleich: also ist in diesem Falle alles erfüllt, was zur Gleichheit zweyer Dreyecke erfordert wird (19); also ist das Dreyeck ABC = ADC: folglich die Wechselwinkel m und n gleich. Wenn man die Figur bey AC verschneidet, daß man die Dreyecke auf einander legen kann, so fallt m auf n.

31. Fig. 20 ist also d = e, wie eben bewiesen worden; c und f sind ihre Ergänzungswinkel zu 180°, also ist c = f, d. i. auch die stumpfen Wechselwinkel sind gleich.

Weil e = d, (30) und a = d (5), so ist a = e, d. i. der äußere und innere entgegengesetzte Winkel sind gleich.

Weil a = e, und h = e, so ist a = h, d. i. die äußere Wechselwinkel sind gleich. b und g sind ihre Ergänzungswinkel zu 180°, also sind auch diese gleich.

Zwey innere auf der nämlichen Seite der schneidenden Linie als c + e machen 180°, denn c + d = 180° (5) anstatt d setzt man e, also c + e = 180°. Dieß zeigt man auch von b + h, von a + g, von d + f.

Wenn sich MN nur sehr wenig um den Durchschnittspunkt bey c bewegt, so hören alle zuvor bewiesene Eigenschaften auf; eine jede ist mit jeder anderen in nothwendiger Verbindung, und wenn man von dem Daseyn nur einer einzigen weiß, so schließt man unfehlbar auf das Parallelseyn der Linien.

Wenn man, wie Fig. 22, den Fall durchschnittener Parallelen doppelt macht, so hat man nur den nämlichen Gedanken **zweymal**; so ist MN und PQ einmal von mn in A und C, einmal von pq in A und B durchschnitten. Durch diesen zweyfachen Durchschnitt aber entsteht das Dreyeck ABC; wir wollen sehen, wie die Eigenschaften des Dreyeckes aus dem Parallelismus herfließen.

32. Wenn man im Dreyecke eine Seite als AB verlängert, so entsteht ein Winkel CAp, den man den äußeren nennt; dieser wird von der Parallellinie MN in zwey Theile getheilt, in pAN

und

und NAC; wegen der schneidenden pq ist pAN = ABC, der äußere dem inneren entgegengesetzten. Wegen der schneidenden mn ist NAC = ACB, sind innere Wechselwinkel, also ganz pAC gleich den zweyen inneren entgegengesetzten ABC + ACB. Der Beweis gilt für alle Dreyecke; man stellt sich nämlich bey dem Ecke, wo die Linie verlängert worden, eine mit der entgegengesetzten Seite parallellaufende Linie vor: also ist bewiesen folgender

33. **Satz. Wenn man in einem Dreyecke eine Linie verlängert, so ist der äußere Winkel gleich den zweyen inneren entgegengesetzten.**

34. Wenn man zu dem Winkel pAC den Winkel CAB addirt, so machen sie 180° aus (5); nun kann man anstatt pAC die zwey entgegengesetzten ABC + ACB setzen, also werden auch diese mit dem dritten CAB 180° ausmachen; nun sind diese die drey Winkel des Dreyeckes ABC: also ist bewiesen folgender

35. **Satz. In jedem Dreyecke haben alle drey Winkel zusammen 180°.**

36. **Folgen.** Wenn die Größe eines Winkels bekannt ist, so weiß man die Summe der übrigen. Fig. 14 sey B = 53°; man subtrahire 53° von 180°, so bleibt 127° die Summe der übrigen; insbesondere aber weiß man derselben keinen.

Wäre das Dreyeck **gleichschenklicht** Fig. 16, so weiß man alle Winkel insbesondere, wenn nur einer gegeben ist. Wäre B 53°, so hätte auch C 53 (25), also beyde 106°; also A = 180 — 106 = 74°. Wenn A gegeben wäre, und hätte 74°, so wäre die Summe der übrigen 180 — 74 = 106°; da diese aber gleich sind, so dividirt man mit 2, und jeder hat 53°. Weil ein gleichseitiges Dreyeck auf allen Seiten gleichschenklicht ist, so hat jeder Winkel 60°.

37. Wenn man die Parallelen MN, PQ noch mit einer Linie durch C schneidet, so hat man den ersten Fall doppelt, und entsteht ein neues Dreyeck; ist die Durchschnittslinie CD mit BA noch parallel, so hat man ein Parallelogramm ABCD.

Da die Durchschnitte verschiedentlich angebracht seyn können, so gibt es auch Arten der Parallelogramme. Wenn Fig. 24 die Parallelen AB, DC

auf

auf AD und BC senkrecht stehen, und alle vier Seiten gleich sind, so ist ein solches Parallelogramm das **Quadrat.** Wenn bey der senkrechten Lage Fig. 25 die Seiten nicht gleich sind, ist es ein **Rektangulum, ein rechtwinklichtes Parallelogramm.** Wenn Fig. 26 die Winkel schief, die Seiten gleich sind, ist es ein **Rhombus, Rante.** Wenn die Winkel schief und die Seiten ungleich sind, wie Fig. 27, ist es ein **Rhomboides, ein rautenartiges Parallelogramm.** Wenn eine eine Fläche von vier Seiten eingeschlossen, derer nur zwey parallel sind, wie Fig. 28, ist es ein **Trapezium.** Wenn keine der vier Seiten parallel ist, nennt man es ein **Trapezoides**, wie Fig. 29.

Nun zu den Eigenschaften des Parallelogramms. Weil Fig. 23 AD und BC von AC geschnitten sind, ist a = b innere Wechselwinkel. Weil AB und CD auch von AC geschnitten werden, ist c = d innere Wechselwinkel: also ist auch e = f; denn ein jeder ist der Ergänzungswinkel zu 180° bey gleichen Summen, denn a + d = b + c. Es ist auch a + c = b + d; aber a + c macht den Winkel BAD, b + d den Winkel BCD aus, e ist ADC, f ist ABC: also sind in einem Parallelogramme die entgegengesetzten Winkel gleich.

Auch

Auch ist das Dreyeck ABC = ADC. Wenn in zweyen Dreyecken eine Seite des einen gleich ist einer Seite des anderen, und die neben dieser Seite liegenden Winkel, so sind die Dreyecke gleich; (21) dieses ist hier. Denn AC = AC, oder beyden Dreyecken gemein, a = b, c = d, also die Dreyecke gleich. Folglich ist AB = CD, AD = BC; d. i. in jedem Parallelogramme sind die entgegengesetzten Seiten gleich, und durch die Diagonallinie AC wird das Parallelogramm in zwey gleiche Theile getheilt. Wenn man die Dreyecke ausschneidet, kann man sehen, wie sie sich decken.

38. Wenn man den Fall Fig. 23 doppelt macht, und durch B und C ein anderes Paar Parallelen zieht, wie Fig. 30, BE, CE, so entsteht ein neues Parallelogramm, wenn man AD bis F verlängert. Durch BE wird das Parallelogramm ABCD in zwey Theile getheilet, nämlich in das Trapezium ABGD und das Dreyeck BGC. Durch CD wird das Parallelogramm EBCF in zwey Theile getheilet, in das Trapezium CGEF und das Dreyeck CBG: dieses ist beyden Parallelogrammen gemein; wenn demnach die zwey Trapezien gleich wären, so wären es auch die Parallelogrammen. Zu den Trapezien ABGD addire man das Dreyeck DGE, so entsteht

das

das Dreyeck ABE. Zum Trapezium CGEF addire man auch DGE, so entsteht das Dreyeck DCF; diese Dreyecke sind gleich. Denn wenn drey Seiten eines Dreyeckes gleich sind dreyen Seiten eines anderen Dreyeckes, so sind die Dreyecke gleich (23). Dieser Fall ist hier: also; denn AB = DC, in jedem Parallelogramme sind die entgegengesetzten Seiten gleich; aus dieser Ursache ist BE = CF, auch ist AE = DF. Denn DE ist ein Theil von beyden, und AD = EF; denn wenn zwey Sachen einer dritten gleich sind, sind sie unter einander gleich; es ist aber AD = BC, und EF = BC, weil es beydesmal in einem Parallelogramme entgegengesetzte Seiten sind; also AE = DF, also das Dreyeck ABE = DCF. Von beyden nimmt man den gemeinen Theil DGE hinweg, so bleiben gleiche Reste, oder ABGD = CGEF; wenn man zu jedem das Dreyeck BGC addirt, so entstehen die ganzen Parallelogramme, folglich ist das Parallelogramm ABCD = EBCF; sie stehen auf einer Grundlinie und zwischen den nämlichen Parallelen, also ist folgender Satz bewiesen.

39. **Wenn zwey Parallelogramme auf der nämlichen Grundlinie, zwischen den nämli=**

nämlichen Parallelen liegen, so sind sie ihrem Inhalte nach einander gleich.

40. Jedes Parallelogramm wird durch die Diagonallinie in zwey gleiche Dreyecke getheilt (37). Wenn daher Fig. 31 zwey Dreyecke ABC, ADC auf der nämlichen Grundlinie und zwischen den nämlichen Parallelen liegen, so sind sie ihrem Inhalte nach gleich; denn sie sind die Hälften gleicher Parallelogramme, welche entstehen, wenn man AE mit CB, und CH mit AD parallel zieht. Auch umgekehrt, wenn zwey gleiche Dreyecke auf einer nämlichen Grundlinie liegen, so liegen sie auch zwischen Parallelen, denn eines vom anderen kann nicht getrennt werden; ABC ist gleich ADC, wenn AC mit BD parallel, so bald sich der Parallelismus ändert, hört die Gleichheit auf; also nur beym Parallelismus ist die Gleichheit zweyer Dreyecke auf der Grundlinie möglich und nothwendig. Auch ist ADC nicht nur die Hälfte von ADHC, sondern auch von AEBC; so oft daher ein Dreyeck und Parallelogramm auf der nämlichen Grundlinie, zwischen den nämlichen Parallelen liegen, ist das Dreyeck die Hälfte des Parallelogramms.

41. Fig. 26 ist das Dreyeck ABC bey B rechtwinklicht. Die dem rechten Winkel entgegengesetzte Linie AC wird die Hypothenuse genannt. Auf jede Seite errichte man ein Quadrat; aus B ziehe man BD auf EH senkrecht, oder mit AE parallel, wodurch das Quadrat der Hypothenuse ACHE in zwey rechtwinklichte Parallelogramme getheilt wird. Wenn man nun beweiset, daß das eine AFDE dem Quadrate Z, das andere DFCH dem Quadrate X gleiche, so ist bewiesen, daß das Quadrat der Hypothenuse gleich sey den Quadraten der Seiten AB und BC.

Aus B Fig. 32 ziehe man BE, aus L, LC, so haben wir die Dreyecke BAE und LAC. BAE ist die Hälfte des Parallelogramms AEDF; denn es liegt auf der nämlichen Linie AE und zwischen den Parallelen AE, BD (40). Das Dreyeck LAC ist die Hälfte des Quadrates LABH; denn es liegt auf der nämlichen Linie AL und zwischen den Parallelen LA, HC (40). Wenn man nun noch beweiset, daß selbst die Dreyecke LAC, BAE einander gleich sind, so ist offenbar die Hälfte des Parallelogramms AFDE gleich der Hälfte des Quadrates LABH.

Wenn

Wenn in zweyen Dreyecken zwey Seiten des einen gleich sind zweyen Seiten des anderen, und die zwischen diesen Seiten liegenden Winkel, so sind die Dreyecke gleich: (19). Diese Bedingnissen sind hier: also. AE = AC; sie sind Seiten vom nämlichen Quadrate (37). AB = AL Seiten vom nämlichen Quadrate. Der Winkel EAB = LAC. Jeder besteht aus zweyen Theilen, EAB aus EAC, welcher als ein Winkel im Quadrate ein rechter Winkel, und aus dem spitzigen CAB. Der Winkel LAC besteht aus LAB, welcher als ein Winkel im Quadrate ein rechter Winkel, (37) und aus eben dem spitzigen BAC. Hiemit der Winkel EAB = LAC. Da aber schon zuvor bewiesen worden, daß das Dreyeck AEB die Hälfte des Parallelogramms AFDE, und das Dreyeck LAC die Hälfte des Quadrates LABH; so ist das halbe Parallelogramm AFDE gleich dem halben Quadrate ABHL. Wenn aber die Hälften gleich sind, sind auch die Ganzen gleich; also ist das Parallelogramm AFDE gleich dem Quadrate ABHL. Eben so wird bewiesen, daß FCHD = BCIK.

Man ziehe Fig. 33 AI und BG, so hat man zwey Dreyecke ACH und BCG. Wenn ACI gleich ist der Hälfte des Quadrates BCIK, und BCG der

Hälfte

Hälfte des Parallelogramms FCGD, und wenn selbst diese Dreyecke gleich sind, so ist offenbar das halbe Quadrat gleich dem halben Parallelogramme, also das ganze Quadrat gleich dem ganzen Parallelogramme.

Wenn ein Dreyeck und Parallelogramm auf einer Grundlinie zwischen Parallelen liegen, ist das Dreyeck die Hälfte des Parallelogramms; dieß ist: also: CI ist eine Linie des Dreyeckes ACI und des Parallelogramms BCIK, CI ist mit AK parallel, zwischen diesen aber liegen beyde Figuren. CG ist die dem Dreyecke BCG und dem Parallelogramme FCGD gemeine Grundlinie; sie liegen zwischen den Parallelen CG und BD. Auch die Dreyecke ACI, BCG sind gleich; denn sie haben zwey Seiten und den zwischenliegenden Winkel gleich. CI = BC Seiten des nämlichen Quadrates, CA = CG im nämlichen Quadrate (37). Der Winkel ACI und BCG besteht jeder aus einem Quadratwinkel und dem nämlichen ACB. Folglich der Winkel ACI = BCG, also das Dreyeck ACI = BCG, also das halbe Quadrat BCIK gleich dem halben Parallelogramme FCGD, also auch das ganze dem ganzen. Wenn man beyde Theile des Beweises zusammen nimmt, so ist folgender Satz bewiesen.

42. **Bey einem rechtwinklichten Dreyecke ist das Quadrat der Hypothenuse gleich den Quadraten der Seiten.**

43. Wenn man zwey Quadrate von diesen dreyen weiß, kann man das dritte finden. Weil wir aber noch keinen deutlichen Begriff von dem Flächeninhalte haben, kann man nicht wohl ein deutliches Beyspiel geben. Was ein Zirkel sey, wissen wir aus (4). Wir müssen ihn noch näher kennen lernen. Fig. 34. Jede Linie, die von einem Punkte der Peripherie zu einem anderen gezogen ist, wird **Senne** genannt; als FH: geht sie durch das Zentrum; wie FG, ist die Senne der **Diameter.** Jede Senne theilt den Zirkel in zwey Theile, die man **Abschnitte, Segmente** nemt; der Diameter theilt den Zirkel in zwey gleiche Segmente, in zwey Halbzirkel ab; alle übrige Sennen in zwey ungleiche Segmente. Ein Theil der Zirkelfläche von zweyen Radius und einem Bogen eingeschlossen ist **Ausschnitt, Sektor.** ABC ist Sektor, auch das Übrige des Zirkels ist Sektor; denn es ist von AB und BC und vom Bogen ADC eingeschlossen. Wie der Bogen eine gewisse Anzahl Grade hält, so hat der Sektor verschiedene Namen. Hat der Bogen 90° Grad, ist der Sektor **Quadrant**; hat er 60°, ist

ist er Sextant, u. s. w. Der Tangent ist eine Linie, die dem Zirkel so begegnet, daß sie in selben nicht hineingeht, als DE. Das Entstehen des Tangents kann man sich also vorstellen. Eine Linie MN auf den Radius BD senkrecht steige in paralleler Linie gegen D, bis beyde Bögen mD, nD verschwinden, oder im Punkte D zusammen fließen, so wird da DE Tangent seyn. Weil die senkrechte Lage von MN auf BD immer bleibt, so ist der Radius BD auf den Tangent perpendikular, und die Berührung geschieht nur in dem einzigen Punkte D.

44. **Wenn man aus dem Zentrum auf eine Senne BC Fig. 35 eine senkrechte Linie AD fallen läßt, so schneidet sie die Senne in gleiche Theile, BD und DC.** Denn ABC ist ein gleichschenklichtes Dreyeck, oder AB = AC, also BD = DC. (7). **Umgekehrt. Wenn eine Linie DE aus D dem mittlern Punkt einer Senne BC senkrecht errichtet wird, so geht sie durch das Zentrum;** denn alle Punkte der Linie DE sind gleichweit entfernt von B und C, nun ist auch das Zentrum von B und C gleichweit entfernt, also geht DE durch das Zentrum.

45. Da das Dreyeck ABD = ADC, so ist der Winkel BAD = DAC, da sie nun als Zentralwinkel die Bögen, worauf sie stehen, für ihr Maaß haben, so ist der Bogen BF = FC, d. i. AF, welche aus dem Zentrum auf BC senkrecht steht, halbirt nicht nur die Senne BC, sondern auch den Bogen BFC.

46. Wenn mit BC eine Senne MN oder wie viel immer parallel gezogen werden, so werden alle von AF senkrecht durchschnitten, also auch halbirt, welches man von einer jeden, wie von BC geschehen, beweisen kann. Da man sich vorstellen kann, durch alle mögliche Punkte des Diameters EF seyen mit BC Parallelen gezogen, als nn, mm, und da alle diese die Oberfläche des Zirkels ausmachen, so ist auch bewiesen, daß der Zirkel durch jeden Diameter in zwey gleiche Theile getheilet werde.

47. **Aufgabe.** Fig. 36. Man giebt drey Punkte ABC, die nicht in einer geraden Linie liegen; man soll einen Zirkel beschreiben, dessen Peripherie durch die drey Punkte geht. Man hänge sie durch Linien AB, BC zusammen, die man als Sennen eines Zirkels betrachtet. Man halbire AB senkrecht in D, so geht DE durch das Zentrum eines Zir-

kels;

kels; man halbire auch BC senkrecht in F, so geht an F. H durch das Zentrum. (44). Also liegt das Zentrum so wohl in DE als FE, folglich in dem gemeinschaftlichen Punkte Z. Wenn man mit dem Radius ZB einen Zirkel beschreibt, so ist dieser der verlangte.

48. Wenn ein Winkel seinen Spitz im Zentrum hat, so ist sein Maaß der Bogen, auf dem er steht. (4). Wir wollen sehen, was das Maaß eines Winkels sey, der seinen Spitz nicht im Zentrum hat. Fig. 35. Wenn man mit BC eine Parallele MN zieht, so wird durch den Perpendikel so wohl MN, als der Bogen MFN halbirt (45). Wenn man vom Winkel BAF den Winkel MAF abzieht, bleibt der Winkel BAM. Wenn man von CAF den Winkel NAF abzieht, bleibt CAN. Da aber BAF = CAF, und MAF = NAF, so ist der Winkel BAM = CAN, also sind auch die Bögen BM, CN, d. i. zwey Zirkelbögen, welche von zweyen Parallelen abgeschnitten werden, einander gleich. Auch die Sennen dieser Bögen sind gleich; denn das Dreyeck BAM ist gleich dem Dreyecke CAN (19), also die Senne BM = der Senne CN. Also allgemein: **gleiche Bögen haben gleiche Sennen, und umgekehrt.**

49. Fig. 37. Der Winkel BAC hat für sein Maaß die Hälfte der Bögen BC und DE. Denn wegen Gleichheit der Dreyecke BAC, DAE sind die Sennen BC, DE gleich, also auch die Bögen (48); also ist der Bogen BC das Maaß von BAC = (BC + DE) dividirt mit 2.

50. Fig. 38. Der Zentralwinkel LGM hat die Hälfte der Bögen LM, DH als Maaß (49). Man nehme außer dem Zentrum den Punkt B an, ziehe BC mit GM, BA mit GL parallel, so ist wegen dem Parallelismus der Winkel ABC = LGM; also hat auch ABC die Hälfte der Bögen LM, DH für sein Maaß. Wenn man vom Bogen DH zwey Stücke wegnimmt, und setzt sie dem Bogen LM zu, so bleibt die alte Summe, DE nimmt man weg, und ersetzt es unten durch MC; denn MC = DE, weil EC mit DM parallel (48). FH nimmt man weg, und ersetzt es durch AL, also ist die Halbsumme der Bögen AC + EF auch das Maaß des Winkels ABC. Allgemein. **Das Maaß des Winkels, der seinen Spitz in der Peripherie hat, ist die Hälfte der Bögen, die von den Schenkeln abgeschnitten werden.**

51. Fig. 38 und 39. Dieß gilt auch, wenn der Spitz des Winkels bis zur Peripherie steigt, oder bis EF = o; und es ist AC + o dividirt mit 2 das Maaß des Peripheriewinkels ABC, d. i. **ein Peripheriewinkel hat für sein Maaß den halben Bogen, auf dem er steht.** Man kann es auch so beweisen. Durch das Zentrum zieht man HL mit BA, DM mit BC parallel; LGM ist gleich ABC, LGM hat die Halbsumme der Bögen, LM, DH für sein Maaß (49); DB nimmt man weg, und ersetzt es durch MC, anstatt BH setzt man AL, (48) also ist halb AC das Maaß von LGM, oder von ABC.

52. Fig. 40. Wenn ein Tangent AB mit der Senne CD im Berührungspunkte C zwey Winkel BCD, ACD macht, so hat BCD für sein Maaß halb CD, und ACD halb CED. Aus D ziehe man DE mit BA parallel, so ist EDC = BCD, sind innere Wechselwinkel (30). EDC hat für sein Maaß halb EC; er ist ein Peripheriewinkel, (51). Aber EC = CD (48); also hat auch BCD den halben Bogen CD, welchen die Senne abschneidet, für sein Maaß. Weil BCD + DCA = 180° (27) oder der Peripherie halb genommen; also bleibt für ACD halb CED als Maaß.

53. Fig. 41. Wenn mehrere Peripheriewinkel ADB, AEB ꝛc. auf dem nämlichen Bogen AB stehen, so sind alle gleich; denn alle haben halb AB als Maaß (51). Der Zentralwinkel ACB, der auf eben dem Bogen steht, hat diesen ganzen Bogen zum Maaß; also ist **der Peripheriewinkel die Hälfte des Zentralwinkels, der auf eben dem Bogen steht.**

54. Fig. 42. Der Winkel ABC steht in dem Segmente ACBA, das kleiner als der Halbzirkel, und auf dem Segmente ADCA, das grösser als ein Halbzirkel ist: ABC hat für sein Maaß halb ADC, aber ADC hält mehr als 180°, also halb ADC mehr als 90°, also ist ABC stumpf. (5).

55. Fig. 43. Der Winkel ABC steht in dem Segmente ABCA, welches grösser als der Halbzirkel, und auf dem Segmente ADCA, welches kleiner als der Halbzirkel ist; er hat aber als Maaß halb ADC, dieser Bogen hat weniger als 180°, also seine Hälfte weniger als 90°, also ABC spitzig. (5).

56. Fig. 44 steht der Winkel ABC in und auf dem Halbzirkel, sein Maaß ist halb ADC,

ADC

ADC hält 180°, also halb ADC = 90°, ABC ist also ein rechter Winkel. (5).

57. Aufgabe. Fig. 45. Man soll in A am Ende der Linie BA einen Perpendikel errichten. Außer AB wählt man einen Punkt E, so daß E von A etwas gegen B zu liegt. Mit dem Radius EA beschreibt man einen Zirkel, der AB irgendwo in D schneidet, durch D und E zieht man den Diameter DC, durch A und C zieht man CA, diese ist auf AB senkrecht; denn CAD ist der Winkel im Halbzirkel. (56).

58. Fig. 46 ist C ein Winkel außer der Peripherie, und steht auf dem Bogen AD. Durch E ziehe man EF mit CA parallel, so ist der Bogen EG = AF (48), der Winkel FED = ACD, der äußere dem inneren bey Parallelen. Das Maaß von FED ist halb FD, also auch das Maaß von C, FD ist aber gleich AD weniger AF oder = AD weniger GE, d. i. FD ist die Differenz zwischen den von den Schenkeln CA und CD abgeschnittenen Bögen AD und GE; da also halb FD das Maaß des Winkels C ist, so sagt man: das Maaß eines Winkels, der seinen Spitz außer dem Zirkel

hat,

hat, ist die halbe Differenz der Bögen, welche die Schenkel des Winkels abschneiden.

Fig. 47. Wenn eine Linie des Winkels C den Zirkel schneidet, die andere berührt, wie CA und CD, und man EF mit CD parallel zieht, so ist C = AEF, und das Maaß von AEF oder von C ist halb AF, AF ist die Differenz zwischen ED und AFD, weil ED = DF (48). Also die halbe Differenz AF ist das Maaß von C.

Fig. 48 berühren beyde Schenkel CA, CB den Zirkel. Man ziehe DF mit CB parallel, so ist der Winkel ADF = ACB; ADF hat als Maaß den halben Bogen DF, weil DA Tangent ist. (52). Also hat auch C als Maaß halb DF. Weil DE = EF, so ist DF Differenz zwischen DE und EFD; also das Maaß des Winkels C ist die halbe Differenz der abgeschnittenen Bögen DE und EFD.

59. Ein reguläres Vieleck ist eine Fläche, die von geraden Linien eingeschlossen ist, welche alle gleich, und unter gleichen Winkeln mit einander verbunden sind. Fig. 49. Man theile die Peripherie des Zirkels in beliebig viele gleiche Theile, hier in acht. Man ziehe von jedem Theilungspunkte

zu jedem folgenden eine Senne, als AB, BC, CD ꝛc. Diese werden alle einander gleich seyn. (48). Auch die Winkel GHA, HAB, ABC ꝛc. sind gleich: der Winkel GHA steht auf dem Bogen GDA; er hat ihn halb für sein Maaß. (51). Der Winkel HAB steht auf dem Bogen HDB, den er halb als Maaß hat; der Bogen GDA ist gleich HDB; denn jeder ist die ganze Peripherie weniger zwey Bögen GH, HA, oder HA, AB, die alle gleich sind. Wir haben also ein reguläres Vieleck. Die Winkel werden Poligonwinkel genannt. Reguläre Vielecke sind also möglich.

60. Fig. 50. In jedem regulären Vielecke giebt es einen Punkt, der von den Ecken des Vieleckes gleichweit entfernt ist. ABCDE sey ein reguläres Fünfeck. Man halbire zwey Winkel, als CDE und DEA, so wird halb CDE = halb DEA, oder FDE = FED; das Dreyeck DFE ist also gleichschenklicht. (26). Halbirt man noch einen dritten Winkel EAB, so ist auch das Dreyeck EFA gleichschenklicht, d. i. AF = EF; da nun auch die Dreyecke DEF, EAF gleich (21), und also EF seine Lage und Grösse nicht ändern kann, so muß AF eben in jenem Punkte eintreffen, wo sich DF und EF schneiden; dieß zeigt man auf gleiche Weise

mit

mit BF, CF. Also ist F der Punkt im Vielecke, der von allen Ecken gleichweit entfernt ist.

61. Die Winkel bey dem Zentrum sind alle gleich; denn alle Dreyecke DFC, CFB ꝛc. sind gleich; also der Winkel DFC = CFB ꝛc.

62. Wenn man aus dem Mittelpunkte eines regulären Vieleckes auf die Seiten Perpendikel fallen läßt, so halbiren sie die Seiten des Vieleckes; denn die Seiten sind Sennen von gleichen Zirkelbögen (44). Die Perpendikel selbst werden auch einander gleich seyn: denn, Fig. 51, die Dreyecke AFB, BFC ꝛc. sind alle gleich (60), und werden durch Perpendikel in lauter gleiche Dreyecke getheilt. Z. B. Fa = Fa, Aa = aB, bey a, sind rechte Winkel, u. s. w.; also das Dreyeck AFa = BaF, und BFb = bFC; da nun ganz AFB = ganz BFC, so sind auch die Hälften gleich: d. i. aFB = BFb, folglich aF = bF, und bF = cF ꝛc. Wenn man daher aF als Radius annimmt, und damit einen Zirkel beschreibt, so geht er durch alle mittlere Punkte der Poligonlinien, d. i. durch a, b, c, d; e.

63. Wenn man ELD in L halbirt, und die Sennen EL, DL zieht, so bekommt das Vieleck

einen

einen Zuwachs durch das Dreyeck ELD; wenn man bey jedem Bogen so verfährt, so nähert sich das Poligon dem Zirkel, und zugleich wird aus dem Fünfeck ein Zehneck. Fährt man fort, die zehn Bögen wieder zu halbiren, so kömmt die Fläche dem Zirkel wieder näher, und entsteht ein Zwanzigeck; und wenn man sich das Halbiren bis ins Unendliche fortdenkt, so hat man ein reguläres Poligon von unendlich vielen und unendlich kleinen Seiten, dessen Fläche von jener des Zirkels um nichts unterschieden ist; daher kömmt es, **daß man den Zirkel als ein reguläres Poligon betrachtet von unendlich vielen und unendlich kleinen Seiten**; und folglich wird er auch als ein Poligon behandelt.

64. Weil im regulären Poligone die Zentralwinkel gleich sind, so erhält man die Grösse derselben, wenn man die Peripherie des Zirkels mit der Anzahl der Seiten dividirt; der Zentralwinkel eines Achteckes ist 360 : 8 = 45°, eines Neuneckes 360 : 9 = 40°, u. s. w. a.

65. Weil die Dreyecke DFC, CFB 2c., Fig. 50, alle gleich und gleichschenklicht, so sind alle Winkel a, b, c 2c. gleich, der Poligonwinkel DCB

ist

ist gleich b + c, oder weil a = c, auch gleich a + b; man bekömmt also den Poligonwinkel, wenn man den Zentralwinkel von 180° subtrahirt. (35). Der Poligonwinkel im Neuneck ist 180 — 40 = 140°, u. s. w. a.

66. Aufgabe. Man soll ein Achteck von einem beliebigen Radius machen. Man theile 360° mit 8, der Quotus 45° gibt den Zentralwinkel. Fig. 49. Man macht den Winkel BIA = 45°, und beschreibt mit einem beliebigen Radius IB oder Ib einen Zirkel, in dessen Peripherie man den Bogen BA oder ba achtmal herumtragen kann; man zieht die Sennen BA, AH ꝛc. oder ba, ah, so ist das Achteck fertig. Wird der Radius gegeben, so nimmt man diesen.

67. Aufgabe. Man giebt die Seiten eines Vieleckes, als eines Neuneckes; man soll das Vieleck verfertigen. Fig. 52. Man sucht den Poligonwinkel (65); für das Neuneck findet man ihn gleich 140°. Man macht den Winkel ACD = 140°, die Linien AC, CD gleich der gegebenen, und sucht zu den dreyen Punkten A, C, D das Zentrum B (47); mit dem Radius BA beschreibt man einen

Zirkel, in dessen Peripherie sich AC als die Senne von 40° neunmal herumtragen läßt.

Anderst. Man nehme die Hälfte des Polygonwinkels, hier 70°; bey A und C mache man zwey Winkel gleich der gefundenen Hälfte, so bekömmt man das gleichschenklichte Dreyeck ABC, dessen Winkel ABC = 40° (35). Mit BA beschreibt man einen Zirkel, AC ist die Senne von 40°, läßt sich folglich neunmal in der Peripherie herumtragen.

68. **Aufgabe.** **Man soll um einen gegegebenen Zirkel ein Vieleck beschreiben, als ein Fünfeck.** Fig. 51 sey Fd der Radius, womit der Zirkel dcb ꝛc. beschrieben wird. Bey F macht man einen Winkel dFD gleich dem halben Zentralwinkel, hier 36°; aus d errichtet man den Perpendikel dD, macht dE = dD, so ist DFE ein gleichschenklichtes Dreyeck, und der Bogen ELD = 72°. Den Winkel DFc macht man auch 36°, aus D zieht man durch c eine Linie, sie berührt den Zirkel in c; denn sie ist auf Fc den Radius senkrecht, wie aus der Gleichheit der Dreyecke dFD, DFc (19) erhellet; man macht cC = cD, so hält DFC auch 72°, und so beschreibt man weiters das

ganze

ganze Poligon. Nachdem man FD gefunden, könnte man mit diesem Radius den Zirkel beschreiben, und in denselben mit der Senne FD das Poligon einschreiben, welches den inneren Zirkel in c, b rc. eben so wie in d berühren müßte, wie man aus der Figur ersehen kann.

69. Den Flächeninhalt eines Quadrates erhält man, wenn man die Seite desselben mit ihr selbst multiplicirt. Ein Quadrat ist ein Parallelogramm, welches gleiche Seiten und rechte Winkel hat, wie Fig. 24. Nun kann man sich vorstellen, als wäre durch jeden Punkt der Linie BA eine mit BC parallele Linie gezogen, alle diese Linien zusammen genommen würden die Fläche des Quadrates ausmachen. Wenn man aber eine Linie BC oder eine ihr gleiche so oft setzt, als in einer andern Punkte sind, so heißt dieses jene mit dieser multipliciren: also ist der Inhalt des Quadrates $= BC \times AB$, oder weil $AB = BC$, ist der Inhalt $= AB^2$ oder BC^2.

70. Bey einem rechtwinklichten Parallelogram Fig. 25 kann man die Linie BC so oft setzen, als in BC Punkte sind, d. i. man multiplicirt BC mit BA.

71. Fig. 31 sey EACB ein Rektangulum, dessen Inhalt ist AC × CB (70), folglich auch der Inhalt eines jeden ihm gleichen Parallelogramms ACHD; es sind ihm aber alle gleich, die auf der nämlichen Grundlinie und zwischen den nämlichen Parallelen liegen. Weil man anstatt CB kann HF setzen, so ist der Inhalt von HCHD = AC × HF d. i. **den Inhalt eines jeden Parallelogramms erhält man, wenn man die Grundlinie mit der perpendikularen Höhe multiplicirt.**

72. Fig. 31. Weil das Dreyeck ADC die Hälfte des Parallelogramms ACBE ist, so ist der Inhalt des Dreyeckes = AC × CB : 2, oder weil CB = HF, ist der Inhalt = AC × HF : 2, d. i. **den Inhalt eines jeden Dreyeckes findet man, wenn man die Grundlinie mit der perpendikularen Höhe multiplicirt, und das Produkt mit 2 dividirt; oder die halbe Grundlinie mit der Höhe, oder die Grundlinie mit der halben Höhe.**

73. Fig. 28 ist ABCD ein Trapezium, das nur BC und AD parallel hat; durch AC wird selbes in zwey Dreyecke getheilt ABC und ACD. Der Inhalt von ABC ist = BC × AF : 2. Der

Inhalt

Inhalt von ADC ist AD × CH : 2, die Summe oder das Trapezium ist also = BC × AF : 2 + AD × CH : 2 : oder weil AF = CH, ist der Inhalt (BC + AD) × CH : 2 = (BC + AD) : 2 × CH = (BC + AD) × CH : 2, d. i. **der Inhalt des Trapezium erhält man, wenn man die Halbsumme der zwey Parallelen mit ihrer Entfernung multiplicirt, oder die Summe der Parallelen mit ihrer halben Entfernung, oder die ganze Summe mit der ganzen Entfernung, und das Produkt mit 2 dividirt.**

74. Fig. 29 ist ABCD ein Trapezoides, durch die Diagonallinie AC theilt man es in zwey Dreyecke, ABC, ACD; man berechnet jedes insbesondere, und addirt sie in eine Summe, so hat man seinen Flächeninhalt. ABC ist = AB × CH : 2, und ACD = CD × AF : 2. Weil die Diagonallinie AC beyden Dreyecken gemein ist, kann man sie für die gemeinschäftliche Grundlinie gelten lassen, und aus D und B die Perpendikel DE, BG fallen lassen. Man darf also nur die Grundlinie AC mit der Halbsumme der Perpendikel multipliciren, so hat man den Inhalt der Figur ABCD. Dieses kleinen Vortheils kann man sich in Berechnung der Felder

öfter

öfter bedienen. Da man alle von wie viel immer Seiten eingeschlossene Vielecke in Dreyecke zertheilen kann, so kann man den Inhalt eines jeden Vieleckes finden, wenn man jedes Dreyeck insbesondere berechnet, und alle in eine Summe addirt. Bey regulären Vielecken, als Fig. 50, sucht man nur den Inhalt eines Dreyeckes DFC, und multiplicirt dessen Inhalt mit der Anzahl der Dreyecke.

Aus dem Zentrum eines Zirkels, als Fig. 53 aus A, kann man zu jedem Punkte der Peripherie einen Radius Ab gezogen sich vorstellen, neben diesem einen andern Ac, so entsteht ein Dreyeck bAc, welches von einer krummen Linie bc einerseits begrenzt ist. Denkt man sich aber den Punkt c immer näher bey b, so kann man endlich bc ohne Fehler als eine gerade Linie betrachten, und das Dreyeck bAc wird geradlinicht seyn; man kann darin Ab als die Höhe desselben ansehen, bc als die Grundlinie. Auf diese Weise kann man ein Dreyeck an das andere hindenken, und der Zirkel verfällt in unendlich viele Dreyecke, die alle ihren Spitz im Zentrum, und einen unendlich kleinen Theil der Peripherie zu ihrer Grundlinie haben. Alle diese Grundlinien zusammen genommen, oder, was eins ist, die ganze Peripherie muß mit der gemeinen halben Höhe

 oder

oder dem halben Radius multiplicirt werden, um den Flächeinhalt des Zirkels zu bekommen. Nennt man die Peripherie P, den Radius R; so ist die Oberfläche $= P \times R : 2 = P : 2 \times R = R : 2 \times P$.

Was ich von dem Flächeinhalte gesagt, ist allgemein, und dient nur bey Vergleichung zweyer Flächen zu erkennen, wie sie sich gegen einander verhalten. Sind die Produkte gleich, sind die Flächen gleich; sind sie ungleich, sind auch die Flächen ungleich.

76. Nun muß von dem Flächemaaße insbesondere eine Meldung geschehen. Linien werden mit Linien gemessen, indem man eine beliebige Länge als Einheit annimmt, und mit ihr eine zu messende Linie vergleicht, oder untersucht, wie oft die Einheit in der zu messenden Linie enthalten sey. Die als Einheit angenommene Linie nennt man Schuhe, Ruthen ꝛc.; in sich ist es ein Ding, was man als Einheit annimmt, wenn man nur in der nämlichen Arbeit dabey bleibt, oder es meldet, wenn man davon abgeht.

Flächen können mit Linien nicht gemessen werden; denn die Linie hat keine Breite. Man kann wohl mit Hilfe einer Linie abnehmen, wie lang eine Fläche ist; man nimmt also noch eine zu Hilfe, aus der man die Breite erkennt, d. i. man nimmt eigentlich eine Fläche zu Hilfe, und vergleicht mit ihr die zu messende; alsdann entsteht in uns der Begriff einer bestimmten Flächegröße. Man nehme Fig. 54 ein Rektangulum EFBH. Man fragt: wie groß ist dieses Parallelogramm? Um dieß zu beantworten, nehme man ein Quadrat abdc. Je öfter man dieses Quadrat auf dem Parallelogramme herumlegen kann, desto grösser ist es. Man legt db an DB, ab an AB an, macht bey A, C, D Zeichen, und fährt fort, eben dieses Quadrat so oft an BH anzulegen, als möglich (man kann's hier achtual); auf der Linie DG verfährt man wie zuvor, u. s. f., und man findet, daß man dieses Quadrat viermal so anreihen könne, wie über BH geschehen, d. i. man kann es viermal, achtmal herumlegen, oder zwey und dreyßigmal, und man sagt, dieses Parallelogramm habe 32 Quadrate, derer jedes = abdc, und die Frage ist beantwortet. Wenn ab einen Schuh, und also abdc einen Quadratschuh hält; so hält EFBH 32 Quadratschuhe; ist ab eine Ruthe, so ist abdc eine Quadratruthe, und EFBH hält 32 Quadratruthen;

 ist

ist ab eine Meile, so sind es 32 Quadratmeilen u. s. w.

77. Nicht allzeit geschieht es, daß ein Quadrat ohne Rest könne gewisse Male über eine Fläche gelegt werden. Nehme man die 55. Fig., und das Quadrat abdc von Fig. 54 sey wieder die Einheit. Wenn man bey A anfängt, so kann man abdc sechsmal bis in E anlegen, und bleibt EB über, welches noch halb cd gleich; wenn man cd an EB anlegt, so reicht EB noch bis m, und ist also der Rest EBHF ein halbes Quadrat. Eben dieses findet man in der zweyten, dritten Reihe, d. i. allzeit 5 Quadrate und ein halbes; dieß macht $16\frac{1}{2}$. Aber AD ist länger als 3ac um MD, welches noch der vierte Theil von ca ist, also wird DMPQ noch den vierten Theil von cabd bedecken; dieß geschieht in allen 5 vertikalen Reihen. Man hat also 5 Viertelquadrat, oder $1\frac{1}{4}$, in allem $17\frac{3}{4}$. Noch ist übrig pqCN. Weil pq der vierte Theil von ca, so reicht es in ca bis f, und da pN $= \frac{1}{2}$ cd, so reicht pN in cd bis m, also deckt cmef das Parallelogramm pNCq; es ist aber cmef der achte Theil vom Maaße cdba, also hält die Fläche $16 + \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$ Quadrate. Man untersuche die Fläche ABCD auch mit Rechnen; AB hält 5, 5. AD = 3, 25, diese

multi-

plicirt geben das Produkt 17,875 oder $17\frac{7}{8}$, wenn man den Decimalbruch in einen gemeinen verwandelt.

78. Wir wollen ein rechtwinklichtes Dreyeck ABC Fig. 57, die Hälfte des Quadrates ABCD, vor uns nehmen. AB halte 6 Schuhe, der Inhalt des Quadrates ist also 36 Quadratschuhe; die Hälfte oder das Dreyeck hält also 18. Man lege wie zuvor das Quadrat abdc von Fig. 54 von B gegen A so oft als möglich; man kann es fünfmal ganz thun, und bleibt noch AEF, welches von der Hälfte des Maaßes bedeckt wird; in der Reihe II kann man es viermal thun, und bleibt wieder eine Hälfte EHG über, so fährt man fort bis C, und zählt die ganzen Quadrate, derer 15 sind, und 6 halbe dazu, gibt 18. Wenn die Dreyecke nicht so regulär sind, als ABL, kann man den Flächeinhalt auf ähnliche Weise finden, wie man zum Theil in AHB sieht, wo man 7 ganze oder beynahe 8 Quadrate zählt; der Rest HBL ist also gleich AHC, und ABL wird 18 Quadrate halten, wie ABC. Da es schon bewiesen ist, daß ABL = ABC (40), so wird ABL gefunden, wenn man AB mit halb CB oder halb LM multiplicirt. (72). Da jede auch unregelmäßige Fläche, in Quadrate, Dreyecke, Trapezien ꝛc. kann getheilt werden, so sehen wir uns im Stande, jede

Fläche

Fläche vermittelst eines angenommenen Quadrates, als des bequemsten Maaßes, zu messen und zu berechnen.

79. Zwey Flächen können gleich seyn, so, daß eine die andere vollkommen deckt, wie wir von zweyen Dreyecken wissen. Sie können aber auch gleich seyn, so, daß eine die andere nicht deckt, jedoch eine eben so viel Raum hält, als die andere, wie wir von zweyen Parallelogrammen, Dreyecken wissen, die auf der nämlichen Grundlinie zwischen den nämlichen Parallelen liegen. Ferner kann jede Fläche angesehen werden als ein Produkt aus zweyen Faktoren; wenn man dieses mit dem einen Faktor dividirt, so ist der Quotus allzeit der andere Faktor. Aus diesen Gründen wollen wir einige Aufgaben auflösen.

80. **Aufgabe.** Man gibt eine Anzahl Quadratschuhe, z. B. 72, man soll das für diese Zahl gehörige Parallelogramm verfertigen. Wenn man keinen Faktor gibt, so kann man einen wählen, z. B. 12; wenn man damit dividirt, ist der Quotus 6, d. i. wenn eine Linie im Rektangulum 12 Schuhe lang ist, so ist die Höhe 6'. Fig. 57 sey AB = 12', BC auf AB senkrecht sey 6', aus diesen

Linien

Linien macht man das Rektangulum, welches die Aufgabe auflöset, wie man sieht, wenn man 1.1', 2.2' ꝛc., I.I', II.II' ꝛc. zieht; das Rechteck AII'B hält 12 Quadrate, und so die übrigen. 6mal 12 gibt 72. Wollte man ein schiefes Parallelogramm haben, so sucht man CB, wie geschehen, zieht durch C mit AB eine Parallele DF, und macht zwischen AF und DF eine Parallelogramm, z. B. AEFB; auch dieß lößt die Aufgabe auf. (38). Nimmt man den Faktor 8 als Divisor, so ist der Quotus 9, mit 8' und 9' macht man das Rechteck Fig. 58.

81. **Aufgabe.** Man gibt eine Anzahl Quadratschuhe, z. B. 81, man soll ein Dreyeck von dieser Grösse verfertigen. Den Inhalt eines Dreyeckes erhält man, wenn man die Grundlinie mit der halben Höhe multiplicirt: also findet man die halbe Höhe, wenn man das erhaltene Produkt mit der Grundlinie dividirt. Man dividire 81 etwa mit 9, der Quotus 9 ist die halbe Höhe. Fig. 58 sey AB=9, AC sey senkrecht auf AB und gleich 9; wenn man AC noch einmal in CE überträgt, so ist AE die ganze Höhe des Dreyeckes; durch E ziehe man mit AB eine Parallele, so werden alle Dreyecke, die auf AB zwischen AB und EF liegen, als AEB, AFB der Aufgabe Genügen leisten (40).

Aus

Aus dem Gesagten kann man jede gegebene Fläche in ein Dreyeck oder Parallelogramm verwandeln.

82. Man giebt eine Oberfläche in Quadratschuhen, z. B. 144. Man soll das Quadrat dazu verfertigen, oder, was das Nämliche ist, man soll eine gegebene Fläche in ein Quadrat verwandeln. Aus der gegebenen Zahl zieht man die Quadratwurzel aus, die gefundene Zahl ist die Seite des verlangten Quadrates. Die Wurzel von 144 ist 12. Fig. 59 mache man $AB = 12$, AC auf AB senkrecht auch 12., so wird das Quadrat 144 kleinere enthalten. Kann man die Wurzel nicht genau erhalten, so sucht man sie mit Decimalklassen, bis man glaubt, man könne zufrieden seyn.

83. Es ist nun leicht zwey Dreyecke mit einander zu vergleichen. Setze man, Fig. 60 seyen zwey Dreyecke von gleicher Höhe, die Höhe AG von ABC sey gleich DG von EDF; die Grundlinien BC, EF seyen ungleich. Um zu erfahren, wie sich diese Dreyecke gegen einander verhalten, ob eines der halbe, dritte, vierte ꝛc. Theil vom andern sey, suche man beyder Inhalt. $ABC = \frac{BC \times AG}{2}$ und $DEF = \frac{EF \times DG}{2}$; diese Dreyecke werden also

unter

unter einander seyn wie diese Produkte, und wir haben folgende geometrische Proportion:

$$ABC : DEF = \frac{BC \times AG}{2} : \frac{EF \times DG}{2}.$$ Wenn man das zweyte Verhältniß Glied für Glied mit 2 multiplicirt, so bleibt die Proportion unverändert, und man hat $ABC : DEF = BC \times AG : EF \times DG$. Weil $AG = DG$, so kann man das zweyte Verhältniß Glied für Glied mit einer gleichen Grösse, das ist hier mit AG und DG, dividiren, ohne daß das Verhältniß geändert werde, und man hat $ABC : DEF = BC : EF$, d. i. das Dreyeck ABC verhält sich zum Dreyecke DEF wie die Grundlinie BC zur Grundlinie EF. Wenn man setzt, daß BC nur halb so groß als EF, so ist auch ABC nur halb so groß als DEF; ist BC der dritte Theil von EF, ist auch ABC der dritte Theil von DEF u. s. w. Es ist ohne dieß einleuchtend, daß man in Vergleichung der Dreyecke, wenn die Höhen gleich sind, schon nicht mehr auf dieselben sehe, sondern nur auf ihre Grundlinien. Folgender Satz ist also in seiner Allgemeinheit erwiesen.

84. **Wenn zwey Dreyecke gleiche Höhen haben, und ungleiche Grundlinien, so**

verhal-

verhalten sie sich ihrem Inhalte nach wie ihre Grundlinien.

85. Fig. 61. Im Dreyecke ABC ziehe man mit einer Linie, etwa mit AC, wo immer eine Parallele FD, wie auch FC und DA, hieraus entstehen mehrere Dreyecke. Die Dreyecke DFC, FDA haben die Linie FD gemein, und liegen zwischen Parallelen FD, AC; sie sind also einander gleich. Vergleiche man CFD mit DFB, man sieht, daß sie gleiche Höhe haben; denn ihre Spitzen kommen in F zusammen, und durch F kann man mit BC eine Parallele ziehen, d. i. sie haben die nämliche Höhe FG, also sind sie unter einander wie ihre Grundlinien (84), und es ist CFD : BFD = CD : DB.

Wenn man das Dreyeck ADF gegen das nämliche DFB hält, so sieht man, daß sie die nämliche Höhe DE haben; denn in D kommen ihre Spitze zusammen; sie haben verschiedene Grundlinien AF und FB, also sind sie unter einander wie ihre Grundlinien, und es ist ADF : BDF = AF : FB. In diesen zweyen Proportionen sind die zwey ersten Verhältnisse einander gleich, und geben folgende Proportion CD : DB = AF : FB; das heißt: die

die zwey übrigen Linien AB, CB des Dreyeckes ABC werden von DF, die mit der dritten AC parallel ist, in proportionirte Theile getheilt; es ist also folgender Satz bewiesen.

86. **So oft in einem Dreyecke eine Linie gezogen wird, die mit einer Seite des Dreyeckes parallel läuft, so werden die zwey andern in proportionirte Theile geschnitten.**

87. Setze man voraus, daß zwey Seiten AB, CD in proportionirte Theile geschnitten seyn; man wisse aber nicht, daß die durch die Theilungspunkte F und D gezogene FD mit AC parallel sey; kurz: man weiß nur diese Proportion: CD : DB = AF : FB. Wenn man CDF, wie (85), mit DFB vergleicht, so hat man die Proportion CFD : DFB = CD : DB. Wenn man ADF mit FDB vergleicht, so hat man ADF : DFB = AF : FB. In diesen zweyen letzten Proportionen sind gemäß der Voraussetzung die letzten Verhältnisse einander gleich, also auch die erste, und man hat folgende Proportion: CFD : DFB = ADF : DFB, und nach Verwechslung der mittleren Glieder: CFD : ADF = DFB : DFB; weil das dritte Glied gleich dem vierten, so

ist

ist das erste gleich dem zweyten, oder das Dreyeck CFD ist gleich dem Dreyecke ADF; da nun beyde Dreyecke die nämliche Grundlinie FD haben, so müssen sie zwischen Parallelen liegen. Also ist FD mit AC parallel (40), und folgender Satz ist bewiesen.

88. **Wenn in einem Dreyecke zwey Linien in proportionirte Theile getheilt werden, so ist die durch die Theilungspunkte gezogene Linie mit der dritten Linie des Dreyeckes parallel.**

89. Fig. 62. Wenn man zwey Dreyecke annimmt, in welchen der Winkel E = B, der Winkel F = C, so muß D = A seyn. (35). Man lege den Winkel D auf A, so wird E auf E′, F auf F′ fallen, und E′F′ wird mit BC parallel; denn nach der Voraussetzung ist E = E′ = B, der äußere dem inneren entgegengesetzten. (31). Also tritt der Fall ein (86). Wenn in einem Dreyecke eine Linie E′F′ mit der dritten BC parallel ist, so werden die anderen AB und AC in proportionirte Theile getheilt, und man hat diese Proportion: AE′ : E′B = AF′ : F′C, und mit Zusammensetzen AE′ + E′B : AE′ = AF′ + F′C : AF′. Es ist aber AE′ + E′B

= AB,

= AB, und AF′ + F′C = AC, und AE′ = DE, AF′ = DF; also hat man AB : DE = AC : DF, d. i. die gleiche Winkel A und D einschließende Seiten sind unter einander proportionirt.

Eben so legt man E auf B, so wird DEF auf ABC liegen, wie Fig. 64. D′F′ wird AC parallel, weil der äußere Winkel bey F′ = C dem inneren; also werden AB und BC in proportionirte Theile getheilt, und man hat BD′ : D′A = BF′ : F′C mit zusammensetzen BD′ + D′A : BD′ = BF′ + F′C; BF′ es ist aber BD′ + D′A = BA, BD′ = ED, BF′ + F′C = BC, BF′ = EF, also wird die Proportion seyn: BA : ED = BC : EF, d. i. die gleiche Winkel B und E einschließende Seiten sind unter einader proportionirt. Auf gleiche Weise zeigt man, daß BC : EF = AC : DF, wenn man nämlich F auf den ihm gleichen Winkel C legt. Daher ist folgender Satz bewiesen.

90. **Wenn in zweyen Dreyecken die Winkel des einen den Winkeln des andern gleich sind, so sind die, gleiche Winkel einschließende Seiten unter einander proportionirt, oder man kann aus selben eine geometrische Proportion machen, oder die**

glei=

gleichen Winkeln entgegengesetzte Seiten sind unter einander proportionirt.

91. Man nehme einen andern Fall. In zweyen Dreyecken Fig. 64 ABC, DEF seyen die Seiten des einen den Seiten des anderen proportionirt, oder, was eins ist, man setzt folgende Proportionen voraus:

I. AC : CB = DF : FE,

II. AB : CB = DE : FE,

III. AB : AC = DE : DF.

Man errichte über eine Linie BC ein Dreyeck also, daß der Winkel BCH = DFE, und der Winkel HBC = DEF; hiemit sind die Seiten des Dreyeckes HBC proportionirt mit denen von DEF (90). Wenn man nun beweist, daß das Dreyeck ABC = BHC, so hat auch das Dreyeck ABC mit DEF die Winkel gleich, und die Seiten proportionirt.

Wenn in zweyen Dreyecken drey Seiten des einen gleich sind dreyen Seiten des andern, so sind die Dreyecke einander gleich. (23). Dieser Fall ist hier. Also. BC ist beyden Dreyecken gemein. AC ist gleich HC; denn sie haben zur nämlichen dritten CB das nämliche Verhältniß. Aus der Voraussetzung ist I. AC : CB = DF : FE. Und weil BCH mit DEF gleiche Winkel hat, so sind die Seiten pro-

portionirt

portionirt (90), und ist HC : CB = DF : FE. In diesen zweyen Proportionen sind die zwey ersten Verhältnisse dem nämlichen dritten gleich, also unter einander, d. i. AC : CB = HC : CB, oder nach Verwechslung der mittleren Glieder: AC : HC = CB : CB. Weil CB = CB, muß AC = HC seyn.

Auch ist AB = HB; denn sie haben zur nämlichen dritten das nämliche Verhältniß: aus der Voraussetzung ist: II. AB : BC = DE : EF, und weil HBC mit DEF proportionirte Seiten hat (90), so ist HB : BC = DE : EF. Die zwey letzten Verhältnisse in diesen Proportionen sind gleich, also auch die ersten; es ist also AB : BC = HB : BC, mit Verwechslung der Glieder AB : HB = BC : BC. Weil BC = BC, so ist AB = HB. Also das Dreyeck ABC = BCH, und m = m′ = F, n = n′ = E, A = H = D, also sind die Seiten von ABC proportionirt den Seiten von DEF. Folglich ist bewiesen dieser Satz.

92. **Wenn in zweyen Dreyecken die Seiten des einen proportionirt sind den Seiten des andern, so sind auch die den proportionirten Seiten entgegen stehenden**

Winkel

Winkel gleich. Dieser Satz ist der umgekehrte von (90).

93. Endlich setze man, daß in zweyen Dreyecken zwey Seiten des einen proportionirt sind zweyen Seiten des andern, und die zwischen diesen Seiten liegenden Winkel gleich: oder Fig. 62 sey DF : DE = AC : AB, und A = D. Man lege den Winkel D auf A, und DE reiche bis E′; durch E′ ziehe man mit BC eine Parallele E′F′, so hat das Dreyeck AE′F′ mit ABC alle Winkel gleich; sie haben also auch proportionirte Seiten. (90). Wenn man nun beweiset, daß das Dreyeck DEF = AE′F′, so hat auch DEF mit ABC alle Winkel gleich, und alle Seiten proportionirt.

Wenn in zweyen Dreyecken zwey Seiten des einen gleich sind zweyen Seiten des andern, und die von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel gleich sind, so sind die Dreyecke einander gleich (19). Dieß ist hier. Also. Denn A = D, DE = AE′; nur ist noch zu zeigen, daß AF′ = DF durch die Parallele E′F′ geworden sey. DF und AF′ haben zu gleichen Linien ein gleiches Verhältniß; man vergleiche AF′ mit AE′, es ist AF′ : AE′ = AC : AB (90). Man vergleiche DF mit DE, so gibt

die

die Voraussetzung: DF : DE = AC : AB. Die zwey letzten Verhältnisse sind gleich: also auch die zwey ersten, und man hat AF' : AE' = DF : DE' mit Verwechslung der Glieder AF' : DF = AE' : DE; nun hat man AE' = DE gemacht, also ist AF' = DF' hiemit ist das Dreyeck DEF = AE'F', also E = E' = B, und F = F' = C, und die dritte Seite EF mit der dritten BC proportionirt; also ist bewiesen dieser Satz.

94. **Wenn in zweyen Dreyecken zwey Seiten des einen proportionirt sind zweyen Seiten des andern, und die zwischen diesen Seiten liegenden Winkel gleich sind: so sind die zwey übrigen Winkel des ersten gleich den zweyen übrigen Winkeln des zweyten, und die dritte Seite des ersten proportionirt der dritten Seite des zweyten.**

95. Wenn in zweyen Dreyecken die Winkel des einen gleich sind den Winkeln des andern, und die gleichen Winkeln entgegengesetzten Seiten proportionirt: so nennt man diese Dreyecke ähnliche Dreyecke. Man hat demnach drey Fälle, in welchen zwey Dreyecke einander ähnlich seyn können.

96. Erster Fall. Wenn in zweyen Dreyecken die Winkel des einen gleich sind den Winkeln des andern, so sind auch alle Seiten proportionirt (90), hiemit die Dreyecke ähnlich (95).

97. Zweyter Fall. Wenn in zweyen Dreyecken die drey Seiten des einen proportionirt sind mit den dreyen Seiten des andern, so sind auch die Winkel des einen gleich den Winkeln des andern (92), hiemit die Dreyecke ähnlich (95).

98. Dritter Fall. Wenn in zweyen Dreyecken zwey Seiten des einen proportionirt sind mit zweyen Seiten des andern, und die von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel gleich sind: so sind die zwey übrigen Winkel des ersten gleich den zweyen übrigen Winkeln des zweyten, und die dritte Seite des ersten proportionirt mit der dritten des zweyten (94), hiemit die Dreyecke ähnlich (95).

99. Fig. 65. Wenn im Dreyecke DBC mehrere Linien MP, NQ ꝛc. mit BC parallel gezogen

werden,

werden, so nehme man die Dreyecke DMP, DNQ. Weil MP mit NQ parallel, so ist (86) MD : MN = DP : PQ. Man ziehe auch MS und NT mit DC parallel; in den Dreyecken MBS, MNR ist MN : MR = NB : RS. Weil MR = PQ und NT = QC (37); so ist MN : PQ = NB : QC. Aus der ersten Proportion hat man mit Verwechslung der Glieder MN : PQ = DM : DP, in diesen zweyen letzten Proportionen kommt das Verhältniß MN : PQ zweymal vor, also ist auch DM : DP = NB : QC; d. i. wenn man in einem Dreyecke wie viel immer Parallelen zieht, sind allzeit die Theile der durchschnittenen Linien proportionirt; doch muß man allzeit zwey und zwey nehmen, die zwischen den nämlichen Parallelen liegen.

100. **Aufgabe.** Fig. 66. Man soll eine Linie MB in 7 gleiche Theile schneiden. Man ziehe unter einem beliebigen Winkel eine unbestimmt lange Linie MC, und übertrage auf selbe siebenmal eine beliebige Oeffnung des Zirkels; sie reiche bis C. Man zieht CB, so hat man ein Dreyeck MBC. Durch alle Punkte m, n, o ꝛc. ziehe man mit CB die Parallelen mm', nn' ꝛc., so ist MB durch die Punkte m, n, o ꝛc. in 7 gleiche Theile getheilt; denn (99) es ist Cm : mn = Bm' : m'n', aber

Cm = mn, also Bm′ = m′n′, und so von den übrigen. Wie man Parallellinien bequem zieht, läßt sich mündlich leichter erklären, und man findet es in jedem praktischen Buche.

101. **Ausdehnung dieser Aufgabe.** Man soll eine Figur entwerfen, Fig. 67, in welcher man bequem eine gewisse Anzahl gleicher Theile von einer gegebenen Linie nehmen könne. Man soll von CB bald einen, bald zwey, drey ꝛc. sechste Theile nehmen. Man ziehe CD unbestimmt aus; das bequemste ist, wenn man sie auf CB senkrecht macht. Aus C übertrage man bis D sechs gleiche Linien Cm, mn, no ꝛc., von B zieht man BD, aus m, n, o ꝛc. errichte man Perpendikel mm′, nn′, oo, pp′ ꝛc., so ist geschehen, was man verlangt. Denn weil das Dreyeck Dqq′ ähnlich DCB, so ist Dq : DC = qq′ : CB; nun ist Dq ein sechster Theil von DC, also qq′ ein sechster von CB. Das Dreyeck Dpp′ ist ähnlich DCB, also ist Dp : DC = pp′ : CB. Aber Dp sind zwey sechste Theile von DC, also auch pp′ zwey sechste von CD. Eben so zeigt man, daß oo′ drey, nn′ vier, mm′ fünf sechste Theile von CB seyn müssen.

Theile

Theilt man jede Linie Cm = mm′ = no ꝛc. in zwey gleiche Theile, oder CD in zwölf gleiche Theile, so kann man von CB einen, zwey, drey ꝛc. zwölfte Theile nehmen; denn Dr ist der zwölfte Theil von DC, also rs der zwölfte von CB, u. s. w. Will man CB öfter als einmal nehmen, so kann man sie, so oft man will, auf die Seite gegen F übertragen, als in CF = FE ꝛc. Man soll nun mit dem Zirkel CB einmal und noch 3 sechste Theile dazu nehmen; so setzt den einen Fuß in t, den andern in o′, so ist to′ die verlangte Linie; denn to = CF = CB, und oo′ sind noch drey sechste Theile von CB. Verlangt man 2 CB und noch 5 sechste Theile dazu, so setzt man ein in u und m′, so ist um′ = um + mm′, oder = 2 BC und mm′ oder 5 sechste Theile. Will man zwölfte Theile haben, so nimmt man nebst den vorigen auch die punktirte Linien zu Hilfe, in EG braucht man aber alsdann auch die Mittelpunkte r, w, x ꝛc; also wäre rs = 2 CD und 1 zwölfter Theil, xx′ = 2 CD und 5 zwölfte Theile, u. s. w.

Man sieht leicht ein, daß durch fortgesetzte Halbirungen r in CD man immer kleinere Theile von CB nehmen könne. Gegenwärtige Theilung kann

man

man aber nur für den Fall gebrauchen, wenn man das Ganze in 3, 6, 12, 24 ꝛc. Theile theilet; für andere Fälle wäre sie unbequem. Wir wollen setzen, man theile das Ganze in 4 Theile, so müßte man Fig. 68 CD in 4 Theile theilen, und die Perpendikel 1I, 2II, 3III würden tauglich seyn; alsdann könnte man CD in 8, 16, 32 ꝛc. Theile theilen, so könnte man auch von CB den 8ten, 16ten ꝛc. Theil nehmen.

102. Weil die Theilung des Ganzen in 10 Theile mit der Arithmetik übereinstimmt, so hat man diese Theilung auch in der Geometrie für die bequemste gefunden. Man soll eine Figur machen, Fig. 69, in der man von einer gegebenen Linie AD einen oder mehr zehnte, hundertste, tausendste ꝛc. Theile nehmen kann. Man theile DA in 10 gleiche Theile, so kann man von dieser Linie schon einen oder mehr zehnte Theile nehmen, z. B. D 1 ist ein, D 2 sind zwey, D 3 sind drey zehnte Theile, u. s. w. Um aber einen oder mehr hunderte Theile zu nehmen, müßte man etwa D 1 wieder in 10 Theile theilen. Dieß geschieht also: in A errichtet man einen Perpendikel auf AD willkürlich lang, als AB, und theilt ihn in 10 gleiche Theile. Aus AD und AB macht man das Rektangulum ADCB.

DC wird getheilt wie AB, BC wie AD. Aus den Theilungspunkten 1. 2. 3. ꝛc. der Linie AB zieht man Linien zu den übereinstimmenden Punkten von DC, die mit AD parallel seyn werden. Von D zieht man Dd zum ersten Theilungspunkte der Linie CB; von 1 dem ersten Theilungspunkte der Linie DA zieht man 1e zum zweyten Theilungspunkte der Linie CB, und so fort, so ist die verlangte Figur verfertiget; denn in dem Dreyecke DCd kann man ein oder mehrere Theile von Cd oder D 1 nehmen, diese aber sind die hundertsten Theile von DA. Man soll 7 hundertste Theile von DA nehmen, so nehme man 7'a; denn diese Linie hält 7 zehnte Theile von D 1, also 7 hundertste von DA: soll man zu diesen sieben hundertsten Theilen noch einen zehnten Theil von DA nehmen, so öffnet man den Zirkel bis in c, so ist 7'c ein zehnter und 7 hundertste Theile von DA, oder 17 hundertste Theile; denn ca = D 1. Damit man aber mehrere Ganze, als AD ist, nehmen könne, verlängert man AD nach Belieben, und überträgt darüber AD, so oft man will, als in DI, I II. II III ꝛc. Eben so macht man es mit BC, und hängt die Punkte zusammen, wie die Figur zeigt; auch werden die mit BC parallelen Linien verlängert. Die ganze Linie A IV hält 5 Einheiten. Verlangt man, man soll 3 Ganze und 60 hundertste Theile nehmen,

so setzt man die Zirkelfüße in III und 6 ein, und III 6 ist die verlangte Linie. Man wolle 3 Ganze und 65 hundertste Theile, so fährt man bey III um 5 Parallelen hinein bis 5'', den andern Fuß setzt man in 5', wo die Linie von 6 gegen 5' auswärts steigt, so ist 5'' 5' die verlangte Linie.

Läßt man DA für 10 Schuhe gelten, so ist D 1 ein Schuh, 7'a ist 7 Zehntheilchen eines Schuhes, die man Zolle nennt. Läßt man DA 100 Schuhe gelten, so ist D 1 10 Schuhe, und 7'a sind 7 Schuhe; gilt DA 1000 Schuhe, so ist D 1 100, 7'a ist 70 u. s. w. Man kann wenigst dem Augenmaaße nach auch halbe Zehntheilchen nehmen; DA sey = 100. Man soll ein Ganzes 22½ Zehntheilchen nehmen, so wird mn die verlangte Linie seyn. Man kann im Gegentheile untersuchen, wie viel eine gegebene Linie MN Ganze und Theile ausmache. Man nimmt sie mit dem Zirkel, und setzt den einen Fuß in D oder I. II ꝛc., bis man sieht, der andere Fuß müsse zwischen D und A fallen. Hier geht es bey III an, und der andere Fuß reicht etwas über III 3 hinaus; die Linie hält also mehr als 3 Ganze und 3 Zehntheilchen. Alsdann setzt man den Spitz bey III immer weiter hinein, bis der obere Spitz auf einen Durchschnittspunkt falle. Hier geschieht es

in

in o, also hält die Linie MN = 5''o, 335 Theilchen.

Dieses ist nun der so genannte Maaßstab, den man am gewöhnlichsten hat; alle übrige nach den nämlichen Grundsätzen aus der Aehnlichkeit der Dreyecke getheilte Linien sind Maaßstäbe, wie der Fig. 67. Der ganze Grund der Maaßstäbe liegt also in der Aehnlichkeit der Dreyecke.

Man sieht leicht ein, daß man sich verschiedene Maaßstäbe verfertigen könne. Fig. 70 theile man AB in 5 Theile, wenn man jeden fünften Theil in 20 theilt, so ist dadurch AB in 100 getheilt; dieses geschieht durch 20 Parallelen; man kann demnach von AB vermittelst dieser Figur ein oder mehrere hundertste Theile nehmen. Will man AB nur 20 geten lassen, so gilt der fünfte Theil davon nur 4, und man muß allzeit um 5 Parallelstriche hineinrücken, um einen vierten mehr Theil zu erhalten. Man kann auch 2, 4, 6, 8 Zehntheilchen von der Einheit bekommen. Die unmittelbare Betrachtung des Maaßstabes, die mündliche Erklärung, die eigene Uebung können eine weitläufigere schriftliche Erklärung vollkommen ersetzen.

Um sich in Aufsetzung der Proportionen eine Fertigkeit zu verschaffen, will ich noch einige Folgsätze anführen: Fig. 71 sey ein Zirkel, in welchem man wo immer einen Punkt A wählt, durch diesen ziehe man zwey Sennen FC, DB, man ziehe auch BC und FD, so entstehen zwey ähnliche Dreyecke BAC, FAD; denn sie haben alle Winkel gleich. (95). m = n sind Vertikalwinkel (5), a = b sind Peripheriewinkel auf dem nämlichen Bogen DLC. (53). Also ist der dritte d dem dritten c gleich. (35). Auch stehen d und c auf dem nämlichen Bogen FB. Man hat hiemit folgende Proportion: AD : AC = AF : AB; denn AD und AC sind gleichen Winkeln a und b, AF und AB gleichen Winkeln d und c entgegengesetzt. Man könnte auch sogleich zwey Linien vom ersten Dreyecke für das erste Verhältniß nehmen, und für das zweyte die ihnen proportionirte suchen. Also: AD : AF = AC : AB. Das dritte Glied ist mit dem ersten, das vierte mit dem zweyten proportionirt; der Unterschied von der ersten und dieser Proportion ist nur in dem, daß die mittleren Glieder verwechselt sind, welches bey Proportionen allzeit angeht. In jeder geometrischen Proportion ist das Produkt der äußeren Glieder gleich dem Produkte der mittlern. Also: AD × AB = AC × AF; d. i. die rechtwinklichten Parallelogram-

me aus den Abschnitten zweyer Sennen sind einander gleich. Wenn man noch eine als GL zieht, so zeigt man eben so aus der Aehnlichkeit GBA und DAL, daß AD × AB = AL × AG. In der Geometrie pflegt man zu sagen, ein Produkt sey ein Rektangulum. Man nehme AD, und übertrage es in A′D′, errichte in A′ den Perpendikel A′B′ = AB; aus diesen zweyen Linien mache man das Rektangulum B′A′D′C′. Eben so mache man aus AL = A′L′, und A′G′ = AG das Rektangulum G′A′L′H′, so werden diese einander gleich sey; denn eines jeden Inhalt findet man, wenn man die Grundlinie mit der Höhe multiplicirt, das eine ist also A′D′ × A′B′, das andere A′L′ × A′G′; das erste Produkt ist wegen den gleichen Faktoren = AD × AB, das zweyte = A′L′ × A′G′; diese aber sind gemäß dem Beweise einander gleich: also sind in jedem Zirkel alle Rechtecke aus den Segmenten der Sennen einander gleich.

103. Fig. 72 sey ein bey C rechtwinklichtes Dreyeck, aus C lasse man auf die Hypothenuse BD den Perpendikel CA fallen, so wird BCD in zwey andere Dreyecke ACB und ACD getheilt; jedes von diesen ist dem Ganzen ähnlich, also sind sie auch unter einander ähnlich. Wenn in zweyen Dreyecken

drey

drey Winkel des einen gleich sind dreyen Winkeln des andern, so sind die Dreyecke ähnlich (96). Dieser Fall ist hier. Also. Man vergleiche das Dreyeck ABC mit BCD: der Winkel B ist beyden gemein, CAB = BCD sind rechte Winkel, also ist auch der dritte m = m' dem dritten im grossen Dreyecke; also ist ABC ähnlich BCD. Das andere Dreyeck ACD hat mit dem grossen BCD den Winkel m' gemein, DAC, DCB sind rechte Winkel, also ist der dritte n = dem dritten n' im grossen Dreyecke, also ist auch das Dreyeck ACD ähnlich DCB. Die Dreyecke ACD, ACB sind also untereinander ähnlich, weil sie dem nämlichen dritten BCD ähnlich sind; und erhellet auch aus der Gleichheit ihrer Winkel, denn wie bewiesen, ist m = m', n = n', dabey hat jedes einen rechten Winkel; wir können also aus ähnlich liegenden Seiten Proportionen machen.

Wir wollen das Dreyeck ABC mit BCD vergleichen. BC ist in zweyen Dreyecken, in ABC ist sie dem rechten Winkel in BCD dem Winkel m' entgegengesetzt. Es ist AB : BC = BC : BD. Denn mit AB als einer Linie vom Dreyecke ABC, die dem Winkel m entgegensteht, ist BC proportionirt betrachtet als eine Linie vom Dreyecke BCD;

das

das zweyte Glied der Proportion ist BC betrachtet als eine Linie des Dreyeckes ABC, und ist dem rechten Winkel entgegengesetzt, mit dieser ist BD proportionirt, die im Dreyecke BCD auch dem rechten Winkel entgegengesetzt ist. Also ist BC die mittlere Proportionallinie zwischen der Hypothenuse BD und dem an der Linie BC liegenden Segmente AB.

Das Dreyeck ACD ist auch dem ganzen BCD ähnlich, CD ist in beyden Dreyecken zugleich, und man hat diese Proportion: AD : DC = DC : DB, d. i. auch DC ist die mittlere Proportionallinie zwischen der Hypothenuse und dem der Linie CD anliegenden Theile DA. Aus der ersten Proportion ist $BA \times BD = BC^2$, aus der zweyten $AD \times BD = CD^2$; in dem ersten Produkte setzt man anstatt BD die ihr gleiche BH, im zweyten anstatt BD die ihr gleiche DM, so hat man $BA \times BH = BC^2$, und $DA \times DM = CD^2$, also $BA \times BH + DA \times DM = BC^2 + CD^2$. Die zwey ersten Produkte aber sind die zwey Parallelogramme BANH und ADMN, sie machen das ganze Quadrat BDMH der Hypothenuse aus, BC, DC sind die Seiten, also ist das Quadrat der Hypothenuse gleich den Quadraten der Seiten, wie

wir

wir schon, aber aus anderen Gründen, bewiesen haben.

Das Dreyeck ABC ist ähnlich mit ACD, AC ist beyden gemein; man hat DA : AC = AC : AD, oder der Perpendikel CA ist die mittlere Proportionallinie zwischen den Segmenten BA und AD, und $AC^2 = BA \times AD$. Aus diesem erhellet die Eigenschaft des Zirkels, daß nämlich jeder Perpendikel auf dem Diameter, und der sich in der Peripherie endiget; die mittlere Proportionallinie sey zwischen den Segmenten des Diameters.

104. Aehnlichkeit der Dreyecke führt auf Aehnlichkeit der Vielecke. Fig. 73 seyen ABC, abc ähnliche Dreyecke, über AC, ac errichte man noch zwey ähnliche Dreyecke ACD, acd, so sind ABCD, abcd ähnliche Vielecke; denn sie haben alle Winkel gleich, die man gleich gemacht hat, m + n oder der Winkel BAD ist gleich m' + n oder bad u. s. w. Es ist auch BA : AD = ba : ad; denn weil ABC, abc ähnlich ist, so ist AB : ab = AC : ac, und weil ADC, adc ähnlich, so ist AD : ad = AC : ac; in diesen Proportionen sind zwey Verhältnisse dem nämlichen dritten gleich, also unter einander, und es ist AB : ab = AD : ad,

oder

oder AB : AD = ab : ad. Setzt man auf zwey ähnlich liegende Seiten, als AD, ad, noch ähnliche Dreyecke AED, aed, so ist m + n + o = m' + n' + o', oder BAE = bae, und man beweißt wie zuvor, daß BA : AE = ba : ae, und so von anderen Seiten. Wir haben also ähnliche Fünfecke ABCDE, abcde, d. i. solche Figuren, in welchen die Winkel der einen gleich den Winkeln der anderen, und die Seiten des einen proportionirt den Seiten des andern, die gleichen Winkeln entgegen stehen. Man könnte nun fortfahren, auf zwey proportionirte Seiten wieder zwey ähnliche Dreyecke zu errichten, so hätten wir ähnliche Sechsecke, oder man könnte zwey ähnlich liegende Seiten als AB, ab halbiren, und auf ihre Hälften ähnliche Dreyecke setzen, als AFG, afg, und wir hätten ähnliche Siebenecke AFGBCDEA, afgbcdea. Woraus man die Möglichkeit ähnlicher Vielecke sattsam erkennet.

105. Seiten des Vieleckes nennt man jene, die das Vieleck einschließen, alle zusammengenommen sind die **Peripherie**, der **Umfang**. Andere Linien, die man in oder außer dem Vielecke zieht, nennt man **Vermessungen**, **Dimensionen**; AC ist keine Seite des Vieleckes, wohl aber eine Vermessung. Aehnliche Vermessungen sind jene, die in ähnlichen Figu-

Figuren von ähnlich zu ähnlich liegenden Punkten gezogen werden, also sind AC und ac ähnliche Vermessungen, wenn man von G zu D und von g zu d Linien zöge, so wären GD, gd ähnliche Vermessungen. Daß ähnliche Vermessungen mit den Seiten des Vieleckes und unter sich selbst proportionirt sind, beweist man, wie man es von den Seiten bewiesen (104).

106. Weil also ähnlich liegende Seiten unter einander proportionirt sind, so hat man AB : ab = BC : bc = CD : cd = DE : de = EA : ea lauter gleiche Verhältnisse. Aus der Proportionslehre aber ist bekannt: wenn mehrere gleiche Verhältnisse vorhanden, so ist die Summe aller Antecedens zur Summe aller Consequens wie was immer für ein Antecedens zu seinem Consequens; wir erhalten also folgende Proportion: AB + BC + CD + DE + EA : ab + bc + cd + de + ea = AB : ab, oder = DE : de. Die Summe aller Antecedens ist die Peripherie des einen, die Summe aller Consequens ist die Peripherie des andern Vieleckes, und wenn wir die erste Peripherie P, die zweyte p nennen, so ist P : p = AB : ab : d. i. die Umfänge ähnlicher Vielecke verhalten sich unter einander wie ähnlich liegende Seiten, und weil ähnlich liegende Seiten auch mit ähnlichen Dimensionen proportionirt sind, so sagt man

auch:

auch: die Umfänge ähnlicher Vielecke sind unter einander wie zwey ähnlich liegende Seiten, oder zwey ähnlich liegende Dimensionen, also ist auch P : p = AG : ag = AC : ac ꝛc.

107. Aus der Entstehungsart ähnlicher Vielecke sieht man schon, daß die Dreyecke des einen ähnlich sind den Dreyecken des andern; die Linien AD, ad, AC, ac nennt man ähnliche Diagonalen, hiemit werden ähnliche Vielecke durch ähnliche Diagonale in ähnliche Dreyecke getheilt.

108. Aufgabe. Man giebt ein Vieleck, man soll ein anderes ihm ähnliches grösser oder kleiner verfertigen. Wir wollen ein kleineres machen. ABCDE sey gegeben. Die Linien AB ꝛc. sind genommen nach dem Maaße MM′; man soll ein Vieleck machen nach dem Maaße NN′. Man ziehe ab unbestimmt lang, alsdann sucht man, wie viel die Linie AB Theile der Linie MM′ habe, man findet $8\frac{3}{4}$; wir nennen diese Theile Schuhe. Auf dem Maaßstabe NN′ nimmt man also $8'\frac{3}{4}$, und überträgt sie auf ab, so ist AB mit ab proportionirt. Hierauf sucht man, wie viele Theile BC auf MM′ habe, man findet 6 und beyläufig $\frac{1}{5}$; eben so viel nimmt man auf NN′, und beschreibt aus b einen

Bogen; mit AC macht man das nämliche, und beschreibt aus a einen Bogen, der den vorigen in c schneidet, so ist das Dreyeck ABC ähnlich abc; denn die Seiten des einen sind proportionirt den Seiten des andern (97). Ganz auf die nämliche Art entwirft man acd, ade, und abcde wird ähnlich ABCDE; und jenes ist ein Entwurf von diesem.

Man kann die nämliche Aufgabe auch also auflösen: man ziehe ab, alsdann untersucht man die Grösse des Winkels ABC, und macht abc ihm gleich, und zieht bc unbestimmt aus, alsdann nimmt man für ba und bc auf NN' eben so viele Theile, als AB, BC auf MM' haben, so ist das Dreyeck abc ähnlich ABC; denn die Seiten, die gleiche Winkel einschließen, sind unter einander proportionirt, ac ist also auch mit A proportionirt (98). Man untersucht den Winkel ACD, macht acd ihm gleich, macht dc mit DC nach NN' proportionirt, so ist acd ähnlich ACD; eben so wird das Dreyeck ade ähnlich gemacht mit ADE. Und so wird ganz abcde ähnlich ABCDE, oder jenes ist ein Entwurf von diesem.

Man kann auch ähnliche Figuren machen, ohne die Diagonalen zu brauchen. Nachdem abc mit ABC auf eben besagte Weise ist ähnlich gemacht worden, untersucht man, wie viele Grade BCD habe, und macht bcd von eben so vielen Graden; man zieht cd, und macht sie nach NN' von eben so vielen Theilen, als CD nach MM' hat. Den Winkel cde macht man gleich CDE, macht de mit DE proportionirt, so ist auch e bestimmt. Weil a schon Anfangs bestimmt ist, so zieht man ea. Die zwey letzten Winkel bey e und a geben sich von selbst; oder wenn man zur Probe den Winkel e = E macht, so muß das neu zu ziehende ea auf ea fallen, und die Linie ea nach NN' eben so viele Theile haben, als EA nach MM'. Es ist auch nicht vonnöthen, daß man die Winkel in Graden wisse, man kann sie ohne dieses einander gleich machen, welches nothwendig ist, und erkleckt zur Aehnlichkeit der Figuren.

109. Gesetzt nun, ABCDE sey ein Acker, Wald 2c., so wäre abcde der Entwurf davon, und wir hätten durch unser Verfahren feldgemessen. Also ist **Feldmessen, einen dem Felde ähnlichen Entwurf machen.** Welches also geschieht vermittels der Messung der Winkel und der Linien:

 die

die Winkel auf dem Papier werden den Winkeln auf dem Felde gleich, die Linien auf dem Papier werden jenen auf dem Felde proportional gemacht. In diesem besteht die ganze Feldmeßkunst. Kann man ein Feld ganz übersehen, so kann man sich jeder Art von Auflösung bedienen; kann man es nicht übersehen, als einen Wald, so nimmt man die dritte Art, und dieß heißt man **aus der Peripherie messen.** Was jede Art bequemes, beschwerliches habe, wird die Ausübung jeden gar schön lehren.

110. Fig 74. ABCDE sollte ins Kleine gebracht werden. Man erwähle inner dem Vielecke einen Punkt F, von diesem zieht man zu allen Ecken Linien; sie werden alle gemessen. Man nimmt Fa eben so viel Schuhe ꝛc. auf einem kleinern Maaßstabe, als FA nach einem grössern hat; so verfährt man mit allen Linien, wie die Figur schön zeigt, so wird abcde ähnlich ABCDE; denn das Dreyeck aFb ist ähnlich AFB, den Winkel AFB haben beyde gemein, die Seiten aF, bF sind mit AF, BF proportionirt. Also. Und so von den übrigen Dreyecken. Wenn man eine Figur also entwirft, so heißt man dieß **aus dem Zentrum messen.** Man sieht, wie leicht die Anwendung auf das Feldmessen sey. Man stellt in F eine flache Tafel horizontal

auf,

auf, sucht auf selber den Punkt der gerade ober F steht, und verfährt im grossen vollkommen, wie ich es im kleinen gezeigt.

111. Setze man A und B seyen zwey weit voneinander entfernte Punkte, und man könne aus F zu beyden messen, so giebt sich die Aufgab; wie kann man den Abstand der Punkte A und B voneinander erfahren? Diese Aufgabe ist in der Figur wirklch schon aufgelöst, braucht nur Anwendung. Man messe FB und FA, und mache Fb, Fa, so viel Schuhe im kleinen, als FB, FA im grossen haben, man mißt auch den Winkel AFB, und macht aus diesen gegebenen Sachen das Dreyeck aFb, so ist aFb ähnlich AFB, und AB hat so viele Schuhe im grossen, als ab im kleinen hat, d. i. man weis den Abstand des Punkts A von B.

112. Mnn kann auch den Punkt aus dem man messen will, außer der Figur annehmen. Fig. 75 sey E dieser Punkt, aus welchem man das Viereck ABCD messen, und entwerfen soll. Man messe EA, und mache Ea nach einem kleinern Maaßstaab, so sucht man Eb, Ec, ED, so ist die Figur abcd ähnlich ABCD. Wäre ABCDE die zu entwerfende Figur, so kann man seinen Punkt in einem Ecke E wäh-

wählen, und nach der Figur verfahren, so ist abcdE der Entwurf von ABCDE. Wir haben nun gesehen, wie die Aehnlichkeit der Dreyecke die Grundlage des Feldmessens sey.

113. Fig. 76. seyen ABC, EFH ähnliche Dreyecke, aus A und E lasse man die Perpendikel AD und ED fallen, so sind die Dreyecke ABD, EFD auch ähnlich, denn B=F wegen Aehnlichkeit der ganzen, bey D, D sind rechte Winkel; auch ADC ist ähnlich EDH, denn H=C wegen Aehnlichkeit der ganzen Dreyecke bey D, D sind rechte Winkel, also muß beydesmal der dritte Winkel dem Dritten gleich seyn. Zu unserm Vorhaben haben wir die Wahl: ob wir ABD, und EFD oder ADC und EDH brauchen wollen. Wir wollen ABD und EED zu Hilfe nehmen. Weil ABC ähnlich EFH gemäß der Voraussetzung, so ist: BC: FH = BA: EF, und weil ABD ähnlich EFD, so ist AD zu ED = BA: FE, hier sind zwey Verhältnisse dem nemlichen dritten gleich, also untereinander, d. i. BC: FH = AD: ED. Wenn man aber zwey gleiche Verhältnisse Glied für Glied multiplicirt, so ist das zusammengesetzte Verhältniß das Quadratverhältniß, wie man aus der Proportionenlehre wissen muß, es ist also $BC \times AD : FH \times ED = BC^2 : FH^2 =$

$BA^2 :$

$BA^2 : FE^2$ ꝛc. Wenn man in einem Verhältniße beyde Glieder mit der nemlichen Zahl dividirt, bleibt das Verhältniß unverändert also ist $\frac{BC \times AD}{2} : \frac{FH \times ED}{2} = BC^2 : FH^2$ ꝛc. Nun aber ist $\frac{BC \times AD}{2}$ der Flächeinhalt des Dreyecks ABC, und $\frac{FH \times ED}{2}$ der Flächeinhalt des Dreyecks EFH. (72.) also verhält sich das Dreyeck ABC zum Dreyeck EFH = $BC^2 : FH^2$, oder

114. Zwey ähnliche Dreyecke verhalten sich ihrem Flächeinhalt nach wie die Quadrate ähnlich liegender Seiten, oder auch ähnlich liegender Vermessungen. Wenn BC zweymal so klein als FH so ist ABC : EFH = $1^2 : 2^2 = 1 : 4$ oder ABC ist viermal so klein als EFH. Wäre BC : FH = 1:3 so wäre ABC : EFH = $1^2 : 3^3 = 1 : 9$ oder ABC wäre neunmal so klein als EFH.

115. Dieser Satz läßt sich leicht auf mehrere ähnliche Dreyecke anwenden, die ähnliche Vielecke ausmachen. Fig. 73. haben wir drey Paar ähnliche Dreyecke, also folgende Proportionen.

ABC:

$ABC : abc = AB^2 : ab^2$

$ACD : acd = AC^2 : ac^2 = AB^2 : ab^2$

$ADE : ade = AD^2 : ad^2 = AB^2 : ab^2$

folglich auch $ABC : abc = ACD : acd = ADE : ade = AB^2 : ab^2$

Diese Verhältnisse sind gleich, also ist nach der Proportionlehre die Summe aller Antecedens zur Summe aller Consequens, wie ein jedes Antecedens zu seinem Consequens, oder $ABC + ACD + ADE : abc + acd + ade = ABC : abc = AB^2 : ab^2$. Die erste Summe ist der Flächeinhalt des Vieleckes ABCDE, die zweyte ist der Flächeinhalt des Vieleckes abcde, also ist $ABCDE : abcde = AB^2 : ab^2$ d. i. zwey ähnliche Vielecke verhalten sich nach ihrem Inhalte gegeneinander, wie die Quadrate ähnlicher Seiten, oder ähnlicher Vermessungen in dem zuvor erklärten Sinne (114).

Alle Zirkel untereinander sind ähnliche Figuren, denn sie sind ähnliche Vielecke, also verhalten sie sich untereinander wie die Quadrate ihrer ganzen, oder halben Durchmesser, oder wie die Quadrate ähnlich liegender Sennen, in dem Sinne nach (114).

Trigonometrie.

115.

In dem Zirkel Fig. 77. betrachte man den Winkel ABC, aus A, oder C lasse man auf die andere Linie des Winkels einen Perpendikel AF fallen. Diese Senne AF überspannt den Bogen ACF auf einer Seite, und den Bogen AGF auf der anderen Seite. Eben diese Senne, und der Bogen ACF, und AGF werden von BC in gleiche Theile getheilt. (44. 45). Der Bogen AC ist das Maaß des Winkels ABC; also überspannt die Senne AF ein doppelt so grossen Bogen, als das Maaß des Winkels ABC ist, auf der entgegengesetzten Seite ist es eben so: der Winkel ABG ist der Ergänzungswinkel von ABC zu 180°, der Bogen AG = GF ist das Maaß des Winkels ABG, also überspannt AF einen doppelt so großen Bogen, als das Maaß des Winkels ABG ist. Nun nennt man die Helfte einer Senne, die einen doppelt so grossen Bogeu überspannt, als das Maas des Winkels ist, den **Sinus** eben dieses Winkels, also ist AD der Sinus des Winkels ABC, und des Winkels ABG. Der spitzige und der stumpfe

Winkel

Winkel die 180° ausmachen, haben also den nemlichen Sinus. Der Sinus kann auch angesehen werden als eine Bestimmungslinie der Größe der Winkel, denn aus der Größe der Linie AD schließt man auf die Größe des Winkels ABC, und eben darum auch auf die Größe des stumpfen Ergänzungswinkel ABG, hiemit kann man auch aus dieser Ursache sagen: der spitzige und stumpfe Winkel haben den nemlichen Sinus. Heist man den Sinus jene Linie, die aus dem äußersten Punkte A auf die andere Linie des Winkels BC senkrecht herabgelassen wird, so kann man in Rücksicht auf den Winkel ABG, aus A auf GB, die man verlängert, keinen andern Perpendikel als AD fällen, also haben auch in diesem Betracht der spitzige und stumpfe Winkel den nemlichen Sinus. Wollte man aus G dem äußersten Punkt von GB einen Perpendikel auf AB fallen lassen, so müßte man diese verlängern, und GH würde der Sinus des stumpfen Winkels seyn, aber GH ist gleich AD, weil das Dreyeck ADB=GBH (21.) also ist der Sinus des stumpfen Winkels in allem Betracht gleich dem Sinus seines spitzigen.

116. Wenn der spitzige Winkel grösser wird, er werde NBC, so wird auch der Sinus NM grösser. Wird der Winkel 90° groß, wie EBC. so ist die

Seite

Seite EB selbst der Sinus, und einen größeren Sinus giebt es nicht, denn wenn der Winkel noch größer, d. i. stumpf würde, so hätte dieser stumpfe Winkel den nemlichen Sinus mit seinem nebenliegenden spitzigen, hiemit einen kleinern Sinus als EB ist; man nennt den Sinus des rechten Winkels, den **Radius**, den **Sinus totus**, den **ganzen Sinus**, wiewohl man vielmehr sagen sollte den **grösten Sinus**. Jedoch wachsen die Sinus nicht in eben jenem Verhältnisse, in welchem die Winkel wachsen; ein doppelt so großer Winkel hat nicht einen doppelt so großen Sinus.

117. Um die Sinus brauchbar zu machen, hat man einen gewissen Radius oder Sinus totus angenommen, und ihn in 10000000 Theile getheilt angenommen, für diesen Radius hat man alle Sinus der Winkel von 0 bis 90° berechnet. Man hat darüber Tabellen verfertiget, und allen Winkeln von Grad zu Grad, von Minuten zu Minuten ihre Sinus beygesetzt. Um gleich jetzt einen Begriff von der Anwendbarkeit dieser Sinus in etwas zu erhalten, nehmen wir Fig. 78 das Dreyeck EBF vor uns. Der Winkel B halte 46° 36′. BE sey = 135′ man soll die Linie EF berechnen. Man nimmt einen beliebigen Radius BA, denkt ihn in 10000000 Theilchen

chen

chen getheilt, man beschreibt damit den Zirkel, dieser Zirkel ist also jener, für welchen die Tabellen verfertiget sind, den Winkel ABD macht man 46° 36′, den Radius AB nennt man den Tabellarradius, AD wird folglich der Tabellarsinus seyn. Die Dreyecke ABD, EBF sind ähnlich. (96): also ist AB : AD = EB : EF, oder der Tabellarradius verhält sich zum Tabellarsinus von 46° 36′ wie der gemessene Radius EB zu der zu findenden Linie EF. Der Tabellarradius ist 10000000, der Tabellarsinus von 46° 36′ ist = 7265747, BE ist = 135′ also wird die Proportion in Zahlen diese seyn

$$10000000 : 135' = 7265747 \frac{7265747 \times 135}{10000000}$$

$$= 98{,}0875845$$

der gesuchten Linie. Wenn das erste Glied nicht 1 und etliche Nullen wären, so hätte man noch eine unbequeme Divison zu machen gehabt: Um dem Multipliciren, und Dividiren auszuweichen, nehme man statt der gegebenen grossen Zahlen ihre Logarithmen, derer Natur man aus der Proportionlehre kennen muß, und die arithmetische Proportion wird also stehen.

10. 0000000 : 2. 1303338 = 9. 861 2803 : Log. FF die zwey mittlere werden addirt, der erste subtrahirt, so bekommt man 1. 9916141 den Logarithmus von F. Diesen sucht man in den Tabellen, man find den nächsten 1. 9916247 die übereinstimmende Zahl ist 98, 09 nur um sehr wenig größer als wir mit Multipliciren erhalten. Die Zahl noch genauer hier zu suchen laßt mein Zweck nicht zu. Der äußere Zirkel und die Sinus der Winkel sind niemal in der Figur ausgedruckt, man muß sich selbe nur einbilden. In diesem Falle hätte man also nichts vor sich, als das Dreyeck EBF, und die Aufgabe: man giebt den Radius BE, den Winkel B, man sucht EF.

118. Fig. 79 sey das Hauptdreyeck ABC, welches im Zirkel steht, aus D dem Zentrum lasse man eine senkrechte Linie DF auf die Senne BC eine Linie des Dreyeckes fallen, so wird BC in gleiche Theile getheilt. Wenn wir den Winkel FDC betrachten, so ist CF sein Sinus, so wie Fig. 77 AD der Sinus von ABC ist; nemlich CF ist die senkrechte Linie auf DF die andere Linie des Winkels. Auf gleiche Weise läßt man auf AC den Perpendikel DE fallen, so wird auch AC in gleiche Theile getheilt, und CE ist der Sinus des Winkels CDE.

Da-

Dadurch sind auch die Linien AC, CB in proportionirte Theile getheilt, folglich ist FE parallel mit BA. (88), und das Dreyeck CFE ähnlich CBA, also ist FC: CE = CB: CA. oder der Sinus von FDC verhält sich zum Sinus von CDE = CB: CA, es ist aber der Winkel FDC = A denn beyde haben den Bogen CH zum Maaß; FDC zwar, weil er als Zentralwinkel den ganzen Bogen, auf dem er steht, zum Maaß hat, A aber, weil er als Peripheriewinkel den halben Bogen BC, welches CH ist, zum Maaße hat. CDE ist gleich B aus der nemlichen Ursache. Also hat man CF: CE CB: CA, d. i. der Sinus von A verhält sich zum Sinus von B wie CB oder wie die dem Winkel A entgegenstehende Linie, zu CA, oder zu der dem Winkel B entgegenstehenden Linie. Eben dieß läßt sich von dem Sinus von A und C und den gegenüberstehenden Seiten beweisen, wiederum von B und C, vollkommen auf die nemliche Art beweisen, also ist folgender Satz bewiesen.

119. **In einem jeden Dreyecke verhalten sich die Sinus der Winkel gegen einander wie die eben diesen Winkeln entgegengesetzte Seiten.**

Zum

Zum Ueberfluß will ich den Beweis von den Sinus der Winkel A und C hersetzen. Fig. 80. aus D zieht man DM. senkrecht auf BC, so wird BM = MC. BM ist Sinus von BDM oder von dem diesem gleichen Winkel A. DN sey auf AB senkrecht, so ist BN=AN, um BN ist der Sinus des Winkels BDN, oder des diesem gleichen C. Nun ist wiederum das Dreyeck BMN ähnlich BCA, weil BN : NA=BM : MC. also ist BN : BM=BA: BC, oder der Sinus von C verhält sich zum Sinus von A, wie BA : BC, also sind die Sinus der Winkel, wie die diesen Winkeln entgegenstehende Seiten.

120. Wenn in einem Dreyecke ein stumpfer Winkel ist, so läßt sich die nemliche Proportion beweisen. Fig. 81. Das Dreyeck ABC sey in B stumpfwinklicht. Halb AGC ist das Maaß dieses stumpfen Winkels, und der Winkel GDC = ABC, der Sinus aber von CDG ist der Perpendikel CE, oder halb CA, weil dieß der Sinus des Ergänzungswinkel CDE ist. Wenn man aus dem Zentrum D auf BC den Perpendikel DF fallen läßt, so ist halb CB oder CF der Sinus von CDF, oder von den ihm gleichen A. also sind CA und CB in proportionirte Theile getheilt, EF ist also parallel mit AB (88) und die Dreyecke ABC, EFC ähn-

lich

lich (96). Hiemit ist CE: CF = CA: CB d. i. der Sinus von B, welcher CE ist, verhält sich zum Sinus von A, welcher CF ist, wie die dem Winkel B gegenüberstehende Seite AC zu der dem Winkel A entgegengesetzten Seiten BC. Eben diesen Beweis kann man mit den Sinus der Winkel B und C machen, also gilt der Satz (119) auch für stumpfwinklichte Dreyecke.

121. Fig. 82. Im rechtwinklichten Dreyecke ABC ziehe man DF aus dem Zentrum senkrecht auf AC, so ist AD der Sinus des rechten Winkels ADF also auch der Sinus von B. oder halb AC = AD der Radius ist Sinus von B. aus D zieht man DE auf AB senkrecht, so ist AE, oder halb AB der Sinus von ADE, oder von dem ihm gleichen ACB, also AD: AE = AC: AB oder der Sinus vom Winkel B, das ist: AD verhält sich zum Sinus des Winkels C, das ist zu AE wie AC zu AB, d. i. wie die dem Winkel B entgegenstehende Seite AC zu der dem Winkel C entgegenstehenden Seite AB. Eine ähnliche Proportion kann man auch von den Sinus der Winkel B und A und den entgegenstehenden Seiten beweisen. Also ist der Satz (119) in seiner ganzen Angemeinheit dargestellt, und gilt von allen Arten der Dreyecke.

Wir

Wir wollen sogleich eine Anwendung machen, um zu zeigen wohin unsere Theorie abziele. Fig. 83. seyen im Dreyecke bekannt die Linie AC = 380°, und die neben ihr liegenden Winkel A = 36°,30'. C=77° 10', hiemit ist auch der dritte gegeben (35). er ist =66° 20'. Man soll die Linien AB und BC trigonometrisch berechnen. Zuerst siehe man AB. Man muß eine Proportion machen, in welcher die drey ersten Glieder bekannt sind, und AB das vierte Glied ist. So ist folgende: der Sin: von B von 66° 20': Sin. C von 77° 10 = AC : AB. Wenn man die mittlere Glieder multipliciret, und mit dem ersten dividirt, so erhält man AB. Um aber mit so grossen Zahlen nicht multipliciren und dividiren zu müssen, nehmen wir Logarithmen. (Es ist gut, wenn der Anfänger ein oder die andere Aufgabe ohne Logarithmen macht) die Logarithmen der zwey mittleren Glieder werden addirt. Log. Sin. C oder von 77° 10, ist= 9.9890 137. von 380 L.=2. 57978 36. die Summe = 12. 5687973, von dieser wird der Log. von 66° 20 subtrachirt, er ist 9.9618463 die Differenz 2.6069510 ist der Logarithmus von AB, in den Tabellen find man 2.6069185 etwas kleiner, daneben steht 404,5 = AB.

BC sucht man also: Sin. B. 66° 20 : Sin. A 36°30′ = AC : BC. man findt = 2.3923249 und dabey 246,8 = BC.

122. Der Perpendikel BD macht zwey Dreyecke ABD und BDC, in jedem kann man den Perpendikel berechnen, z. B. in ABD. AB ist bekannt = 404,5, und alle Winkel; man macht diese Proportion: der Sin. D. 90° : Sin. A. 36° 30′ = AB : BD. der Sin. des rechten Winkels ist der Radius den man nur mit R bezeichnet. Die Logarithmen stehen also:

10.0000000 : 9.7743876 = 2.6069185 : Log. BD. die mittlere addirt, den ersten subtrahirt giebt 2.3813061. den Log. von AD bey welchen steht 240,6 = BD beynahe. Wenn man AC mit halb BD multiplicirt, so hat man den Inhalt von AB in Quadratruthen = 45714,

123. Wir wollen setzen im Dreyecke ABC seyen bekannt BA und AC, und ein der einten dieser Seiten entgegengesetzter Winkel als B = 660° 20′. Man soll den Inhalt des Dreyeckes finden. Um den Perpendikel BD zu finden braucht man den Winkel A (122). Diesen kann man nur bekommen, wenn

man

man C zuvor sucht, durch folgende Proportion: AB : AB = Sin. 66°20′ : Sin. C. Die Logarithmen von AB und Sin. 66°20′ werden addirt, man hat Log. AB = 2,6069510 + Log. 66°20′ = 9.9618463 = 12.5687973 von dieser Summe wird subtrachirt der Log. von AC = 2. 5797836 die Differenz ist 9. 9890137 neben diesem Logarithmus steht in Tabellen 77° 10, daß ist der Winkel C, den dritten A findt man also, wenn man 66°20′ + 77°10 von 180 subtrachirt; man kann nun wie (122) den Perpendikel BD, und den Inhalt des Dreyeckes ABC finden. Nachdem man den Winkel A hat, findt man auch die Seite BC durch diese Proportion: Sin. B : Sin. A = AC : BC. Oder Sin. C : Sin. A = AB : BC.

Was wir so eben gethan heißt **ein Dreyeck trigononetrisch berechnen.** Wir haben aber noch andere Linien die zum nämlichen Zwecke führen, Die Wissenschaft, welche lehrt mit dergleichen Linien ein Dreyeck berechnen, nennt man **Trigonometrie, Dreyeckmeßkunst.** Wir wollen nun zu den übrigen Linien übergehen.

124. Fig. 84. sey BC der Tabellarradius, der Sinus von ABC ist AE, der Ergänzungswinkel

Staatl. Biblio. Passau

von ABC zu 90° ist ADB, wenn man aus A den Perpendikel AD auf BD fallen läßt, so ist AD der Sinus des Winkels ABD, oder der Sinus des Ergänzungswinkel von ABC zu 90°, diesen Sinus AD nennt man in Rücksicht auf ABC den **Mitsinus, Cosinus** von ABC, AD aber ist gleich BE weil ADBE ein Parallelogramm ist. Wenn demnach im rechtwinklichten Dreyecke ABE der Radius AB ist, oder die Hypothenuße, so ist AE der Sinus von ABC, und BE der Mitsinus, Cosinus eben dieses Winkels ABC. Nimmt man im Dreyecke HBF den Radius BH, so ist HF der Sinus, und HI oder BF der Cosinus des Winkels HBF. AD ist eine Bestimmungslinie, d. i. eine Linie, woraus man die Größe der Winkel ABD, ABC ABG erkennet. Die Linie AD ist also auch der Cosinus des stumpfen Winkels ABG, denn ABD ist der Ergänzungswinkel sowohl des spitzigen ABC als des stumpfen ABG. d. i. ABD ist das jenige, was der spitzige Winkel weniger als 90°, und was der stumpfe mehr als 90° hat.

125. Fig. 85. sey BA Tabellarradius AC ist Tabellarsinus, BC Tabellarcosinus. Im Dreyecke DBE, seyen DB, und der Winkel DBE=37° gegeben; man soll BE finden. Die Dreyecke ABC

DBE

DBE sind ähnlich, also ist AB : BC = DB : BE oder nach trigonometrischer Redensart: der Radius verhält sich zum Cosinus B von 37°, wie die gegebene BD zur zu findenden BE. oder R. cos. B = DB : BE. BD sey = 232° das Complement von 370° ist 53°. man sucht den Sinus von 53° dieser ist der Cosinus von 37°. die Rechnung mit Logarithmen ist also: Log. Cos. B = 9. 9023486 + Log. BD = 2. 3654880 = 12. 2678366 — Log. R. 10. 0000000 = 2. 2678366 dieses ist der Log. von BE, welches man findt beynahe 185/3.

126. Fig. 86. sey der Hauptwinkel ABC: man beschreibe mit einem beliebigen Radius BC einen Zirkel, aus C errichte man einen Perpendikel bis er von der anderen Linie des Winkels in A geschnitten wird: so nennt man AC den **Tangent** oder die **Berührende** des Winkels ABC, BA den **Secant**, oder die **Schneidende**. Wenn ein Winkel größer ist z. B. GBC, so ist auch sein Tangent CG, und Secant größer; wenn der Winkel 90° als CBE, so ist sowohl BE, als CA auf BC senkrecht, sie sind also parallel und schneiden sich niemal, daß heißt; der Tangent vom rechten Winkel ist unendlich groß. Der Tangent ist auch Bestimmungslinie d. i. aus der Größe desselben erkennt man die

Größe des Winkels z. B. ABC, des Ergänzungswinkels ABE zu 90° und des Ergänzungswinkels ABD zu 180°. der stumpfe Winkel ABD hat mit dem spitzigen ABC den nämlichen oder ihm gleichen Tangent, wenn man am Ende der Linie DB wo sie den Zirkel in C schneidet, einen Perpendikel errichtet, bis er die andere Linie BA eben dieses stumpfen Winkels schneidt, so ist wiederum AC Tangent. Errichtet man den Perpendikel am Ende D, bis er die andere BA, die man verlängeren muß, in H schneidt, so ist DH Tangent des stumpfen Winkels, und DH ist gleich AC weil das Dreyeck ABC = HBD (21). Der Winkel EBF, ist der Ergänzungswinkel von ABC zu 90°, wenn man aus E einen Perpendikel errichtet, biß er die andere Linie BF in F schneidet, so ist EF Tangent des Ergänzungswinkel EBF. EF nennt man in Rücksicht auf ABC den **Mittangent, Cotangent.** BA ist der Secant, BF der Cosecant von ABC. Auch der stumpfe Winkel ABD hat den nämlichen Cotangent EF; denn EBF ist das, was der stumpfe Winkel mehr als 90° Grade hat, und der spitzige weniger als 90°, dieses aber nennt man die Ergänzung von beyden. EF ist auch Bestimmungslinie, aus der man die Größe des Winkels EBF forglich auch der Winkel FBC, FBD erkennet.

127.

127. Wenn man Fig. 87. im rechtwinklichten Dreyecke ABC die einte Seite CA als Radius annimmt, so ist AB Tangent des Winkels C. er habe 36° also B = 54°. von diesem Winkel B ist AB Mittangent. Daß AB Tangent von 36° sey, zeigt die Figur. Daß AB auch Cotangent von 54° sey wird also gezeigt. Aus C errichtet man den Perpendikel CD, so hat der Winkel BCD auch 54° und ist auch die Ergänzung von BCA, nun ist AB der Tangent von ACB, und der Cotangent von BCD = 54 also auch Cotangent von CBA = 54° Auf gleiche Weise zeigt man, wenn man mit BA als Radius aus dem Zentrum B einen Zirkel beschreibt, daß AC der Tangent von 54° und der Cotangent von 36° seye. Also allgemein: **Wenn man in dem rechtwinklichten Dreyecke eine Seite von denen die den rechten Winkel machen, als Radius annimmt, so ist die andere der Tangent des ihr gegenüberstehenden, und Cotangent des neben ihr liegenden Winkels.**

128. **Anwendung.** Im Dreyecke BED Fig. 85 sey bekannt BE = 184° der Winkel B = 37° Man soll DE finden. BC sey der Tabellarradius also CA der Tabellartangent, weil die Dreyecke

ABC,

ABC, DBE ähnlich, so ist BC : CA = BE ED d. i. der Radius verhält sich zum Tangent von 37° wie die gegebene Linie BE zum zu findenden DE oder R. Tang. 37° = BE : ED mit Logarithmen 10.0000000 : 9.8771144 = 2.2648178. Log. ED man addirt und subtrachirt, so bekommt man 2.1419322 den Log. von ED, bey seinem nächst kleineren steht 138,6 = ED beynahe. Wäre DE gegeben und B: man sollte BE finden, so geschieht es durch diese Proportion: Der Tangent AC : R. = DE : EB.

Die Secanten sind im Rechnen nicht mehr gebräuchlich, also übergehen wir diese. Wir wissen nun, daß es solche Linien giebt, die mit den Linien eines Dreyeckes in Proportion stehen. Und künftig und in der Ausübung wird nur kurz weg gesagt Radius Sinus Tangent rc. Mit diesem, was ich von Trigonometrie gesagt, könnte ein Feldmesser Theorie genug haben, da wir aber schon auf dem Wege sind, so will ich noch für die jenige, die weiter gehen wollen die übrige Hauptsätze erklären, und anwenden.

129. Fig. 88 sey das Hauptdreyeck ABC. In diesem seyen alle Linien gemessen, man soll die Winkel, und den, aus dem der grösten Seite entgegen-

genstehenden Winkel, herabgelassenen Perpendikel finden, um den Inhalt des Dreyeckes zu finden. Dieß geschieht durch Proportionen, die sich auf einen Satz gründen, der nun zu erklären ist. Man verlängere AB bis in D, so daß BD=BC werde, so ist offenbar AD gleich der Summe der Seiten AB und BC. Wenn man BC oder BD herüber trägt auf BG, so wird AG die Differenz der Seiten AB und BC seyn. Der mit BC beschriebene Zirkel wird von AC die Senne EC abschneiden, diese wird von dem Perpendikel BF in zwey gleiche Theile getheilt (44) und AC wird getheilt in ungleiche Theile oder Segmente AF und FC, daher ist AE die Differenz dieser Theile. Aus C ziehe man die Senne CD, aus E die Senne EG, so entstehen die Dreyecke AGE, ADC, sie sind ähnlich, denn sie haben gleiche Winkel. A ist beyden gemein, AGE ist gleich ACD, denn jeder macht mit einem nämlichen dritten 180° aus. AGE macht mit EGD 180°, weil eine gerade Linie einer anderen begegnet. ECD macht mit dem nämlichen EGD 180°. Denn ECD ist der Peripheriewinkel: hat also halb EGD zum Maaß, der Winkel EGD in der Peripherie, steht auf ECD, hat also halb ECD zum Maaß. Nun machen diese zwey Bögen EGD und DCE die ganze Peripherie aus, also ist das Maaß der Winkel ECD,

EGD, die halbe oder 180°. Wir haben gleiche Summen, die Winkel AGE + EGD gleich den Winkeln ECD + EGD, wenn man EGD in beyden wegnimmt, so bleibt AGE = ECD. Die Dreyecke AGE, ACD haben also alle Winkel gleich, man kann also folgende Proportion machen: AC : AD = AG : AE. AC ist die gröste Seite des Dreyeckes ABC. AD ist die Summe der zwey übrigen. AG ist die Differenz der Seiten = AB — BC. AE ist die Differenz der Segmente AF und FC oder AF—FC. also ist folgender Satz bewiesen.

130. **In jedem Dreyecke verhält sich die gröste Seite zur Summe der übrigen, wie die Differenz der übrigen Seiten zur Differenz der Theile, in welche die gröste Seite von dem, aus dem der grösten Seite entgegenstehenden Winkel, herabgelassen Perpendikel getheilt wird.**

131. Die Anwendung dieses Satzes geht hauptsächlich an in dem ungleichseitigen Dreyecke, ein solches sey ABC. AB sey = 221, BC = 102, AC = 285. die Summe der Seiten AB + BC = 323, die Differenz 119, also hat man diese Proportion 285 : 323 = 119 : AE mit Logarithmen

findet

findet man AE = 134,8 beynahe, wenn man diese Differenz von AC subtrachirt, bekommt man 150,2 = EC, dieß mit 2 dividirt, giebt EF = 75,1 AE + EF ist also = 134,8 + 75,1 = 209,9. oder man findet auch AF, wenn man halb AC zu halb AE addirt: 142,5 + 67,4 = 209,9.

Im Dreyecke BAF welches bey F rechtwinklicht, sind also bekannt AB, AF man findet den Winkel A durch diese Proportion AB : AF = R. Cos. A. mit Log. 2.3443923 : 2.3220124 = 10,0000000 : Cos. A = 9.977620, man findet beynahe 18° 14′. also hat ABF 71° 46′. Endlich findet man BF durch folgende Proportion: R : Tang. A = AF : BF oder durch diese R. Sin. A = AB : BF. Man findet BF 69,147 dessen Logarithmus 1.8397730. Wenn man nun die Logarithmen von AC und BF addirt, so giebt die Summe den Logarithmus vom Produkte AC in BF, dieses sucht man und dividirt es mit 2, so hat man den Inhalt des Dreyeckes ABC. Der Fall, daß im Dreyecke alle Linien gegeben kommt zwar selten vor, doch durfte er nicht übergangen werden, er kann zur Prüfung dienen, ob die Winkel A, B, C gut gemessen sind. Wie wir den Perpendikel mit Hilfe des Dreyeckes ABF gefunden, eben so kann man ihn mit Hilfe des Dreyeckes BCF finden.

132.

132. Fig. 89. Im Hauptdreyecke ABC giebt man AB und BC, und den entzwischen liegenden Winkel ABC: man soll das Dreyeck trigonometrisch berechnen. Um dieses zu leisten, muß ein Satz erklärt werden, welcher der Grund vom praktischen ist.

Man verlängere AB gegen D, so entsteht ein äußerer CBD, dieser ist gleich der Summe m + n (33). Wenn man BD = BC macht und DC zieht, so ist DBC ein gleichschenklichtes Dreyeck. Aus B läßt man auf DC den Perpendikel BF fallen, dieser halbirt DC und den Winkel DBC, also ist FBD auch die halbe Summe von m + n der den gegebenen Seiten entgegengesetzten Winkel m und n. Nimmt man BF als Radius an, und beschreibt damit einen Bogen FL, so ist FD der Tangent des Winkels FBD, oder der Tangent der Halbsumme der den bekannten Seiten AB und BC entgegengesetzten Winkel. Aus B ziehe man BH parallel mit AC, so ist der Winkel HBD = m, der äußere dem inneren entgegengesetzten, und HBD = n sind innere Wechselwinkel. Aus B zieht man noch eine Linie BE also, daß DE = HC werde, und folglich EF = FH, so ist das Dreyeck EBD = HBC, denn BD = BC, DE = HC der Winkel BDE = BCH weil DBC gleichschenklicht (19. 25). also ist der Winkel EBD = HBC = n, also ist auch EBD =

n, da nun HBD = m, und EBD=n, so ist der Winkel HBE die Differenz zwischen m und n oder HBE =HBD—EBD=m—n. Weil BE = BH, wegen der bewiesenen Gleichheit der Dreyecke BDE und CBE, so ist auch das Dreyeck EBH gleichschenklicht, und wird hiemit der Winkel EBH durch den Perpendikel BF halbirt. Also ist EBF die halbe Differenz von m und n, weil EBH die ganze ist. Wenn daher abermal BF als Radius angenommen wird, so ist FE der Tangent des Winkels EBF, oder der Tangent der halben Differenz der den bekannten Seiten BA und BC entgegenstehenden Winkel m und n. Auf die verlängerte Linie AB übertrage man BA in BG, so wird DG die Differenz der Seiten BC und BA seyn, denn man hat anfänglich BD = BC gemacht. Aus G zieht man GI parallel mit AC und BH. Weil GB=BA, so ist auch IH=HC (98), und weil DE = HC gemacht worden, so sind IH und DE die nämlichen dritten HC gleich, also ist DE= IH, wenn man von diesen Linien den gemeinschaftlichen Theil IE abzieht, so bleibt DI=EH. Dieß sind nun die Vorbereitungen zum Beweis, der ganz kurz ist. Weil GI mit AC prallel, so ist das Dreyeck ADC ähnlich GDI also ist AD : GD = CD : ID. anstatt DI setzt man EH, so ist AD : GD = CD : HE, wenn man im letzten Verhältnisse beyde Glieder

mit

mit 2 dividirt, so ist AD: GD $= \frac{CD}{2} : \frac{HE}{2} =$ FD: FE: also AD: GD=FD:FE. AD ist die Summe der Seiten AB und BC; GD ist ihre Differenz, FD ist der Tangent von FBD der Halbsumme der Winkel m und n; FE der Tangent der halben Differenz eben dieser Winkel: also ist dieser Satz bewiesen.

133. In jedem Dreyecke verhält sich die Summe zweyer Seiten zu ihrer Differenz, wie der Tangent der Halbsumme der diesen Seiten entgegengesetzten Winkel zum Tangent der halben Differenz eben dieser Winkel.

134. Wir wollen AC suchen. AB sey = 150, BC = 241. AB + BC = 391, BC — AB = 91. der Winkel ABC = 28°, die Summe m + n = 180° — 28° = 152° die Halbsumme = 76° man hat also AB + BC: BC — AB = Tang. $\frac{m+n}{2}$: Tang. $\frac{m-n}{2}$

oder 391 : 91 = Tang. 760° : Tang. $\frac{m+n}{2}$ mit Logg.

2.5921768 : 1.9590414 = 10. 6032289: 9. 9700935 welches ist der Log. des Tangent mit der halben Differenz, wobey man findet, beynahe 43°. 3'. Dieses

ist

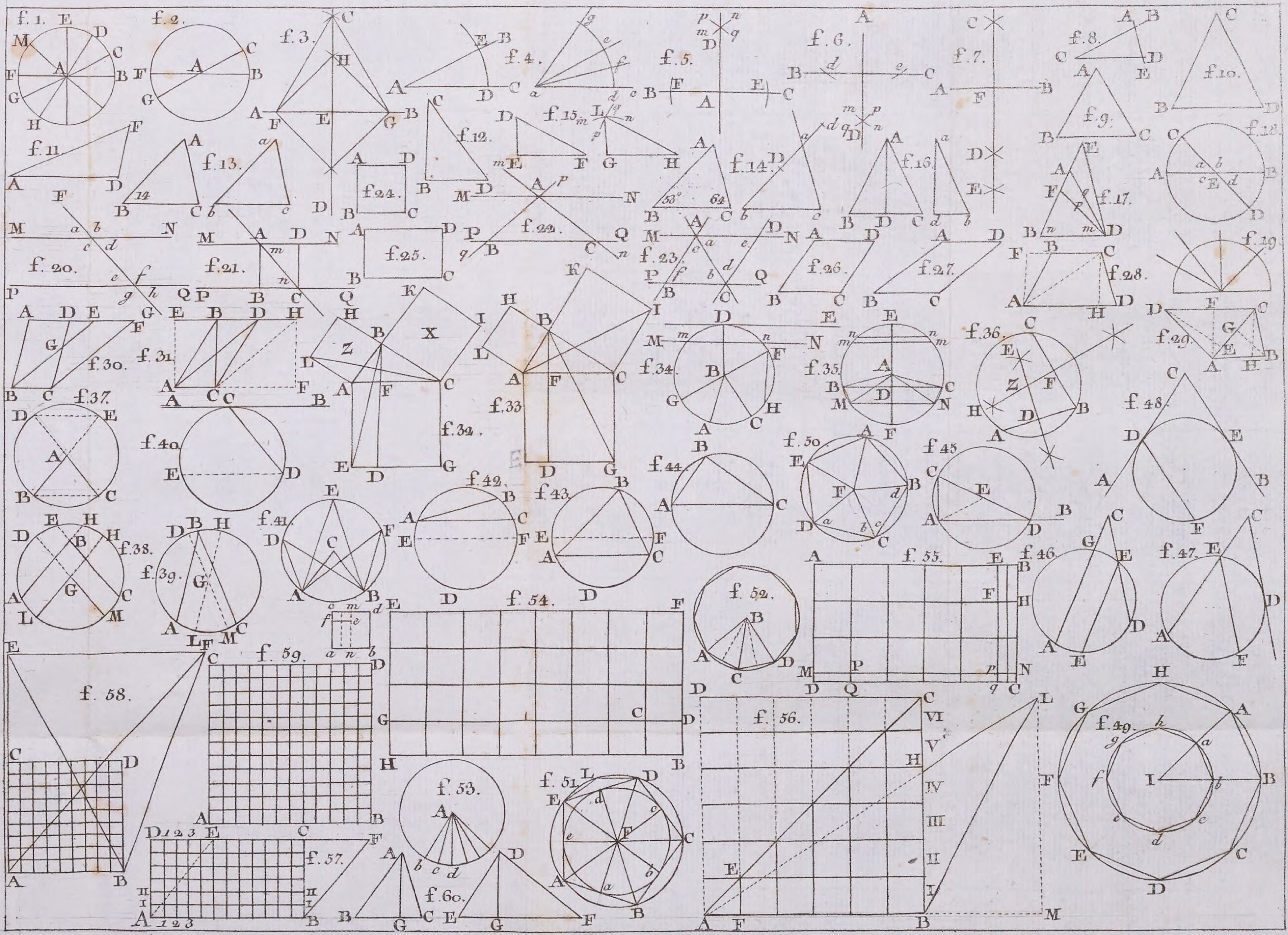
ist die halbe Differenz zwischen BAC und BCA. wenn man die gefundene halbe Differenz zur gegebenen Halbsumme der Winkel m und n addirt, so bekommt man den größeren Winkel BAC, welcher der größeren Seite BC entgegengesetzt ist, und wenn man die halbe Differenz von der Halbsumme subtrahirt, so bekommt man den kleineren Winkel n, welcher der kleineren Seite BA entgegensteht. Der größere ist demnach $= 76^\circ + 43^\circ\ 3' = 119^\circ\ 3'$ der kleinere$= 76^\circ - 43^\circ\ 3 = 32^\circ\ 57$, der dritte also 28° alle zusamm $= 180^\circ$. Man kann jetzt die Linie AC durch diese Proportion finden: Sin. C: Sin. B = BA: AC. d. i. Sin. $32^\circ\ 57'$: Sin. $28^\circ = 150 : x$: mit Log. 9. 7355 246 : 9. 6716093 = 2. 1760913 : 2. 1121760. dieses ist der Logarithmus von AC, für den man beynahe findt 129.5.

Man kann auch AC finden vermittelst des Winkels A, durch diese Proportion Sin. A: Sin. B = BC: AC. Weil A ein stumpfer Winkel ist, nimmt man seinen Ergänzungswinkel zu 180°, und man hat Sin. $60^\circ\ 57' = 28^\circ = 241$: AC mit Logarithmen. 9. 9416090 : 9. 6716093=2. 3820170 : 2. 1120173 man findt beynahe 129,5=AC, wie oben.

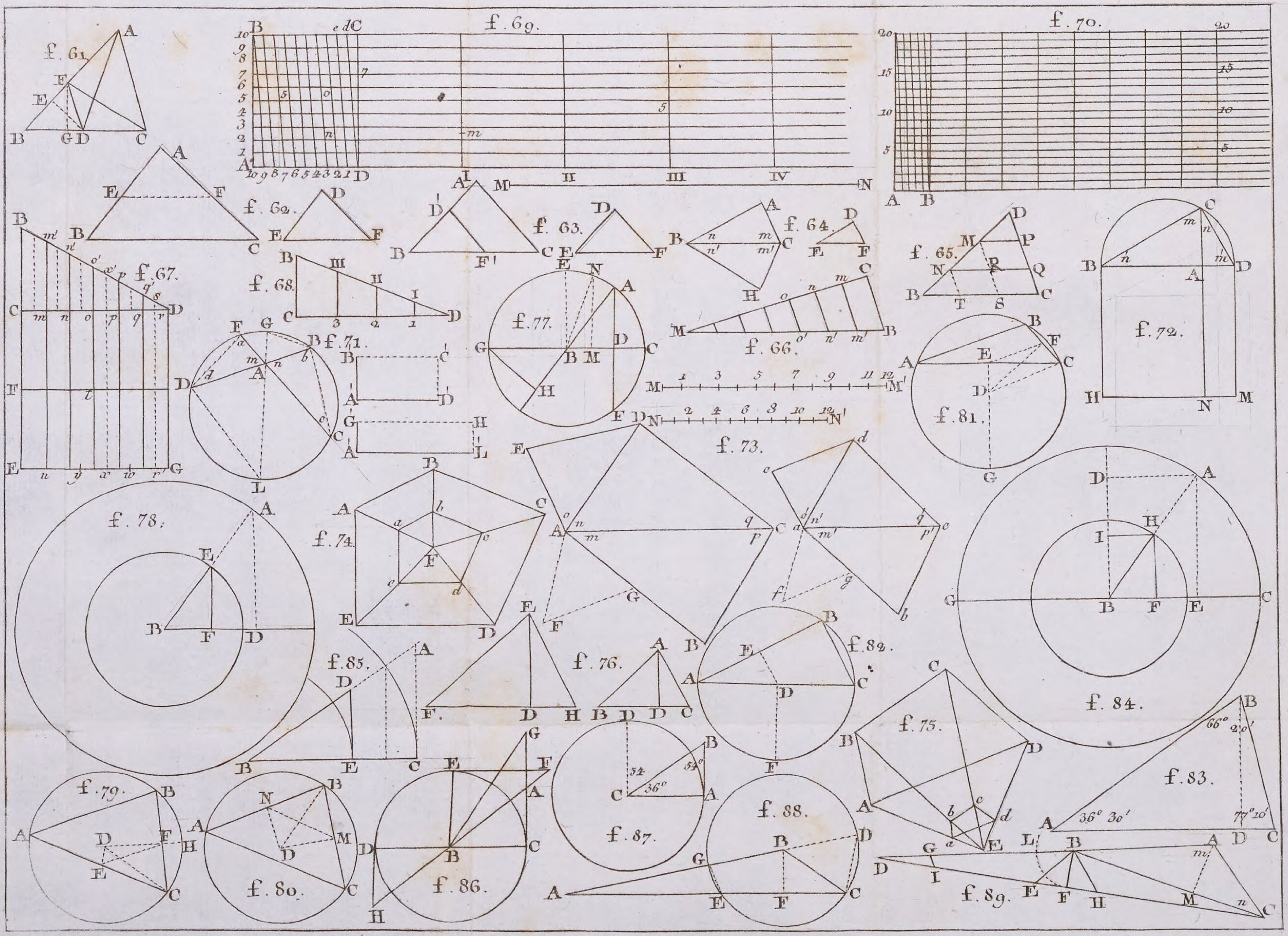
Wenn

Wenn man sich vorstellt aus A werde ein Perpendikel auf AC heruntergelassen, der in M auffällt, so findt man diesen in dem einen der Dreyecke z. B. in ABM durch diese Proportion: R. Sin. 28°—AB: AM mit Logarithmen: 10. 0000000: 9. 6716093 =2. 1760913: 1. 8477006. dieses ist der Logarithmus vom Perpendikel AM man findt ihn beynahe =70,42. Man addire die Logarithmen der Linie BC und des Perpendikels AM 1. 8477006+ 2. 3820170 =4. 2297176 man findt 1697¹/₄ das Produkt wenn BC mit AM multiplicirt; dieß wird dividirt mit 2, und giebt 8485,7. den Inhalt des Dreyeckes ABC. Multiplicirt man die halbe Höhe 35,21 mit der Grundlinie 241 so ist das Produkt=8485,61 differirt von dem vorigen nur um 0,09 eines Quadratschuhes, wenn die Linien in Schuhen gegeben, d. i. nur um 9. Quadratzolle.

Posen



f. 1.
f. 2.
f. 3.
f. 4.
f. 5.
f. 6.
f. 7.
f. 8.
f. 9.
f. 10.
f. 11
f. 12.
f. 13.
f. 14.
f. 15
f. 16.
f. 17.
f. 18.
f. 19.
f. 20.
f. 21.
f. 22.
f. 23.
f. 24.
f. 25.
f. 26.
f. 27.
f. 28.
f. 29.
f. 30.
f. 31.
f. 32.
f. 33
f. 34.
f. 35.
f. 36.
f. 37.
f. 38.
f. 39.
f. 40.
f. 41.
f. 42.
f. 43.
f. 44.
f. 45
f. 46.
f. 47.
f. 48.
f. 49.
f. 50.
f. 51.
f. 52.
f. 53.
f. 54.
f. 55.
f. 56.
f. 57.
f. 58.
f. 59.
f. 60.


f. 61.
f. 62.
f. 63.
f. 64.
f. 65.
f. 66.
f. 67.
f. 68.
f. 69.
f. 70.
f. 71.
f. 72.
f. 73.
f. 74.
f. 75.
f. 76.
f. 77.
f. 78.
f. 79.
f. 80.
f. 81.
f. 82.
f. 83.
f. 84.
f. 85.
f. 86.
f. 87.
f. 88.
f. 89.

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Schäblen, Joseph Judas Thaddäus,

Kurze, jedoch hinreichende Theorie der Geometrie und Trigonometrie samt dem Wesentlichen der Praxis für Förster, Jäger und andere Feldmesser dieser Art

Landshut 1796

Passau, Staatliche Bibliothek -- S nv/OS 81
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11346076-7
VD18 12364665-003